パリティベクトル解析によるコラッツ予想の研究

旧題名「コラッツ予想：パリティベクトル解析から導かれる命題」

Parity Vector Analysis in the Study of the Collatz Conjecture

樋川 和伸　　　　中西 一夫

金沢学院大学名誉教授

2026 年 1 月 25 日

抄 録

本稿は、コラッツ問題に関する Riho Terras[1], Eric Roosendaal [2,3], および David C. Kay [6] の研究成果を基盤にして、「N ＞１のすべての正の整数は有限のストッピングタイムをもつ」という命題に取り組み、パリティベクトルを利用して命題の証明に役立つ知見を獲得するための調査・研究である。まず、有限の長さのパリティベクトルを Terras の収束条件に基づき３分類し、独自の方法により「パリティベクトルの長さ」別と「パリティベクトル中の１の個数」別の両方のパリティベクトルの生成とそれらの個数計算を行い、そしてその結果の考察を行う。また、パリティベクトルの振る舞い、収束状況が視覚的に把握できるツールとして開発したパリティベクトル俯瞰図を提案し、すべての整数を分類する剰余類に対応するパリティベクトル集合や特徴あるパリティベクトルの収束状況を実測データに基づいて分析する。その結果、コラッツ予想が肯定的に成立する裏付けとなる仮説をまとめて列挙する。
本文中に表示されている個々の図表は、ハイパーリンクをクリックすることにより閲覧できるとともに Appendix １にまとめて掲載した。また、上記のパリティベクトル俯瞰図やデータ分析のコンピュータ実演などのデモンストレーションは、該当するハイパーリンクをクリックすることにより確認できる。その実演プログラムのソーステキストは、Appendix ２に掲載のリストからダウンロードすることができる。

Abstract

This paper is based on the research of Riho Terras, Eric Roosendaal, and David C. Kay on the Collatz problem. It addresses the proposition that "every positive integer N > 1 has a finite stopping time" and uses Parity Vectors (PVs) to provide insight that will be useful in proving this proposition. First, we classify finite-length PVs into three categories based on Terras's convergence condition. Then, we generate and count PVs using our own method based on "the length of PV" and "the number of 1s in PV." Finally, we consider the results. We also propose a bird's-eye view of parity vectors as a tool to visually understand their behavior and convergence status. We analyze the set of parity vectors corresponding to the cosets that classify all integers, as well as the convergence status of characteristic parity vectors, based on actual measurement data. As a result, we list hypotheses that support the validity of the affirmative Collatz conjecture. The figures and tables in the main text can be viewed by clicking the corresponding hyperlinks and are summarized in Appendix 1. Additionally, demonstrations such as the parity vector bird's-eye view and the computerized data analysis can be accessed via the corresponding hyperlinks. The source text of the demonstration programs can be downloaded from the list in Appendix 2.

Keywords— コラッツ予想 (Collatz Conjecture), ストッピングタイム (Stopping Time), トータルストッピングタイム (Total Stopping Time), グライド (Glide), グライドレコード (Glide Record), パリティベクトル (Parity Vector), ジェネレータ (generator), v 収束 (v Convergence time), 収束条件式 (Convergence Condition Formula) , ディオファントス方程式 (Diophantine equation), PV 俯瞰図 (Bird's-eye view of the parity vector)

1 はじめに

この章では、議論の前提知識として、過去の関連する研究論文を引用して用語の定義や記法および補題を記載する。そして、その知見に加えて第 2 章以降で我々の研究成果を詳しく説明する。

1.1 コラッツ予想

コラッツ予想 (Collatz Conjecture) とは、「任意の正の整数 N を考え、N が奇数ならば 3 倍して 1 を足し、N が偶数ならば 2 で割る」という操作を繰り返して行うと 1 に到着するという予想である。ただし、N が奇数のときは 3 倍して 1 を足すと必ず偶数になるのでさらに 2 で割るとしても予想の意味は変わらない。
任意の正の整数 N に対して、Si の数列を次のように定義する。

$$S_0 = N \text{ とし、すべての i に対して}$$

$$S_{i+1} = \begin{cases} S_i/2 & : S_i \text{ が偶数の時} \\ (3 \cdot S_i + 1)/2 & : S_i \text{ が奇数の時} \end{cases} \tag{1-1}$$

この S_i の数列, $S(N) = (S_0, S_1, S_2, \cdots, S_{i-1}, S_i, \cdots)$ を N のコラッツ数列と呼ぶ。

1.2 ストッピングタイム および トータルストッピングタイム

任意の正の整数 N (=S_0) のコラッツ数列に関して、$S_k < S_0$ となる最小の整数 k が存在するとき、k を N のストッピングタイム *(Stopping Time:* 停止回数*)* またはグライド *(Glide)* といい、そして $S_q = 1$ となる q が存在するとき、q を N のトータルストッピングタイム *(Total Stopping Time:* 総停止回数*)* またはディレイ *(Delay)* という。
N のストッピングタイムを記号で $\sigma(N)$, N のトータルストッピングタイムを $\sigma_\infty(N)$ で表すことがある。
一般に、すべての正の整数 N は、 $2^k m + r (0 \leq m, 0 \leq r < 2^k)$ の形で表すことができる。
これは、整数Nは 2^k を法とし剰余を r とする 2^k 個の剰余類に分類することを意味する。以降、説明の便宜上、2^k を法とし剰余を r とする剰余類を $N_r = \{2^k m + r\}$ と記述する。

(剰余類のストッピングタイム)
ここで、k=5 としたとき、すべての整数は、 2^5 を法とする 32 個の剰余類 $N_r = \{2^5 m + r\}(0 \leq r < 2^5)$ に分類できる。32 個の Nr に対してストッピングタイムを調べると、Table 1-1 のようになる。

Table 1-1 剰余類 $N_r = \{2^5 m + r\}$ 要素のストッピングタイム or (Appendix 1)

たとえば、r=11 の場合は、
$S_0 = 2^5 m + 11, S_1 = 3 \cdot 2^4 m + 17, S_2 = 3^2 \cdot 2^3 m + 26, S_3 = 3^2 \cdot 2^2 m + 13, S_4 = 3^3 \cdot 2m + 20, S_5 = 3^3 m + 10$
となり、$S_0 > S_5$ であるから $\sigma(2^5 m + 11) = 5$ となる。

すなわち、r=7,15,27,31 以外の Nr に属するすべての整数のストッピングタイムはすべて 5 以下の値となり、r=7,15,27,31 については、ストッピングタイムが存在するならば 6 以上の有限な値となる。

【補題 1】 ストッピングタイムの最大値はない。

(証明) なぜならば、最大値が存在したとしてそれを k とする。$S_0 = 2^k - 1$ という整数を考えると、$S_1 = 3 \cdot 2^{k-1} - 1, S_2 = 3^2 \cdot 2^{k-2} - 1, \cdots, S_k = 3^k - 1$ となり、$S_0 < S_i (1 \leq i \leq k)$ であるからストッピングタイムは k より大きい値にならなければならない。これは、最大値が k としたことに矛盾する。□(証明終記号)

【補題 2】 指定したストッピングタイムをもつ整数を求めることができる。なお、存在しないストッピングタイムもある。

(証明) 指定したストッピングタイムを持つ整数を 1 つ求める場合は、後述するパリティベクトル俯瞰図を参照して、例えば未収束領域の上限と下限のパリティベクトルを利用して求めることができる ([データ分析 3, 4] 参照)。該当する複数個の整数を求めるには、文献 [4] の定理 1 に示されている方法によって可能である。□

【補題３】このストッピングタイム を用いた命題「*N>1* なるすべての整数 *N* は有限のストッピングタイム を持つ」ことが成立すれば、コラッツ予想「すべての正の整数は１に到達する（トータルストッピングタイムをもつ)」も成立することが下記のように示される。

（証明） 整数Nの帰納法により説明する
まず、２のコラッツ数列は $\{2,1\}$ となり１に到達する。3 は $\{3,5,8,4,2,1\}$, 　4 は $\{4,2,1\}$, 5 は $\{5,8,4,2,1\}$,$\cdots$. となり、ある実測できる整数まではすべてストッピングタイムを持ち、かつ１に到達する（トータルストッピングタイムをもつ）ことがわかる、つまり命題は真である。

次に、N 以下のすべての整数がストッピングタイム を持ち、1 に到達すると仮定する。N+1 を考えると、命題の前提条件により N+1 はあるストッピングタイム k を持つ。ということは、N+1 のコラッツ数列の (k+1) 番目の整数は、N+1 より小さい（N 以下の）整数である。そうすると帰納法の仮定より、N 以下のすべての整数は 1 に到達する（トータルストッピングタイムをもつ）ので、N+1 は 1 に到達する（トータルストッピングタイムをもつ）ことになる。したがって、命題は成り立つ。□

なお、Riho Terras（文献 [1]）は、「*N>1* のほとんどすべての整数 *N* は、有限のストッピングタイム をもつ」ことを証明した（文献 [2]Terras の定理参照)。

[デモンストレーション１] 整数 N のコラッツ数列とストッピングタイム Program 1 をクリックして確認できる。このプログラムのソーステキスト（PHP,Python) は Appendix 2 からダウンロードできる。

1.3　パリティベクトルとその収束性

任意の正の整数 N のコラッツ数列に対応する N のパリティベクトル *(Parity Vector)* v(N) を $v_i(N) = S_{i-1}$ mod 2 $(1 \leq i)$ と定義する。k 個の要素の場合は v(N)=$(v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k)$ あるいは v(N)=$v_1v_2v_3\cdots v_k$ と記述する。
このとき、要素数 k はこのパリティベクトル *v(N)* の長さという。そして、このパリティベクトル v(N) を生成した整数 N(=S_0) のことをジェネレータ *(Generator:* 生成元数)、S_{k-1} を v(N) のプレリザルタント *(Pre-resultant:* 結果前数)、S_k を v(N) のリザルタント *(Resultant:* 結果数（文献 [6])。

(例） N=17 の場合は、最初の 6 個の要素は $S_0 = 17, S_1 = 26, S_2 = 13, S_3 = 20, S_4 = 10, S_5 = 5$ であるから $v_1 = 1, v_2 = 0, v_3 = 1, v_4 = 0, v_5 = 0, v_6 = 1$ と表せるので v(17) =(1,0,1,0,0,1) または v(17) = 101001 と書く。17 はこのパリティベクトル V(17) のジェネレータ、5 はプレリザルタント、つぎの $S_6 = 8$ はリザルタントである。

パリティベクトルは、N に対する (1-1) 式のコラッツ操作の反復動作を完全に記述している。下記に、パリティベクトルに関するいくつかの補題を紹介する（文献 [2] [6])。

【補題４】 N を $2^k m + r (0 \leq r < 2^k)$ の形の正の整数とするとパリティベクトルの最初の k 個の要素は、 r にのみ依存する。
(証明は、文献 [2] 補題 1 参照)

【補題５】 $w_i (1 \leq i \leq k)$ が長さ k のパリティベクトル $(w_1, w_2, \cdots, w_k)$ であるとすると、
$v_i(N) = w_i (1 \leq i \leq k)$ となる整数 N が存在する。
(証明は、文献 [2] 補題 2 参照)

【補題６】 S_0= N を正の整数とし、v_i をそのパリティベクトルとする。$d(a,b) = \sum_i v_i (a \leq i \leq b)$ と記載することにする。特に、 d(k) を $d(1,k)$ の省略形とする。すなわち、d(k) は長さ k のパリティベクトル中の"１"の個数である。そうすると、$S_k \approx T_k = S_0 \cdot 3^{d(k)} 2^{-k}$、対数形式で表示すると
$\log(S_k) \approx \log(T_k) = \log(S_0) + d(k) \cdot \log(3) - k \cdot \log(2))$ となり、十分に大きな S_k に対して、
$\lim (S_k - T_k)/S_k = 0$ 　となる。
(証明は、文献 [2] 補題 4 参照)

(例）N=$S_0 = 2^{50} - 1$=1125899906842623 とすると $S_{50} = 3^{50} - 1$= 717897987691852588770248 および $T_{50} = S_0 \cdot 3^{50} \cdot 2^{-50} \approx$ 717897987691851951148749 となる。この 2 つの差は、$10^{-15} \cdot S_{50}$より小さくなり、S_{50} と T_{50}は近似している。

補題６は、v(N) から S_k を推定することができるので、v(N) を使って N の収束性 (Convergence) を考えることができる。N の Convergence とは、N が有限のストッピングタイム をもつか否かの状態を意味するものとする。

いま、$v_i (1 \leq i \leq k)$ を長さ k のパリティベクトルとし、任意の $1 \leq j \leq k$ に対して c(j) を

$c(j) = d(j) \cdot \log(3) - j \cdot \log(2)$(d(j) は補題６で定義した式）と設定する。

この時、$1 \leq j \leq k$ のある j に対して $c(j) < 0$(すなわち、$T_j < S_0$) ならば、v 収束 *(v Convergent)* と呼び、c(j) < 0 となる最小の値 j を v の収束回数 *(Convergence time)*、あるいは一般的にはそのようなパリティベクトルを持つ任意の N の収束回数と呼ぶ。
もし、そのような j の値が存在しないならば v 発散 *(v Divergent)* または v 未収束 *(v Un convergent)* とよぶ。

ここで、$c(j) = d(j) \cdot \log(3) - j \cdot \log(2) < 0$ すなわち不等式

$$j > d(j) \cdot log(3)/log(2) \tag{1-2}$$

を収束条件式 *(Convergence Condition Formula)* とよぶ。

以上のことより、長さが k のパリティベクトル $v_j (1 \leq j \leq k)$ の収束性はつぎの３つに分類できる。
① $k > min\{\exists j \mid j > d(j) \cdot \log(3)/\log(2)\}$ のとき：既収束 *(Already converged)* 、収束回数 (convergence time=j) (j <k)
② $k = min\{\exists j \mid j > d(j) \cdot \log(3)/\log(2)\}$ のとき：確定収束 *(Just converged)*、 収束回数 (convergence time= k)
③ すべての j に対して $j < d(j) \cdot \log(3)/\log(2)$ のとき： 未収束 *(Un converged)*

【記法説明】以降、文章の短縮化のため本文中の単語を下記のように簡略化することがある。
(1) パリティベクトル → PV
(2) 既収束 PV → A-PV、 確定収束 PV → J-PV、 未収束 PV → U-PV

(1-2) 式より、PV の長さを k としたときの d(j) と v 収束回数 j の関係は Table 1-2 のようになる。
ただし、j は $j \leq k$ の値で収束条件式を満たす最小値とする。この表における収束回数の値は、文献 [1] の Table 3 の「Values of the stopping time τ」と合致する。

Table 1-2 PV の長さ k、１の個数 d(j) および v 収束回数の間の関係 or (Appendix 1)

ここで、整数 N のストッピングタイム (グライド) と、v(N) の収束回数 (convergence time) の値は、Riho Terras[1] および Eric Roosendaal[2] の考察により同一視できるものと理解し、以降、ストッピングタイム、グライド, 収束回数を同じものとして使用することがある。

【補題７】 n は１の数が r 個の長さ k のパリティベクトル V の最小のジェネレータと仮定する。このとき長さ k+1 のパリティベクトル $V \oplus x$ (x は 0 か 1) のジェネレータ n' を求める。ただし、$V \oplus x$ は、パリティベクトル V の後ろに x（0 か 1）を付け加える意味とする。
もし、V のリザルタントと x とを比較して
一致する、すなわち、$S_k (\mathrm{mod}\ 2) = x$ ならば $n' = n$
一致しない、すなわち、$S_k\ (\mathrm{mod}\ 2) \neq x$ ならば $n' = n + 2^k$
となる。
さらに、m が V のリザルタント）とすると、$m' = m + 3^r$ は、$V \oplus x$ のプレリザルタントとなる。(2.2 節で参照する。証明は、文献 [6] 定理 A 参照)

1.4　ディオファントス方程式 (Diophantine Equation)

所与のパリティベクトルのジェネレータの存在についてはつぎの補題８からわかる。

【補題８】長さ k のパリティベクトルは、2^k より小さいか等しい正の整数により一意に生成される。そして、長さ k の複数のパリティベクトルは、それらの最小のジェネレータと一対一に対応する。
(補題８の証明は、文献 [6] 定理 B 参照)

（パリティベクトルのジェネレータを求める）

ある整数 n $>$ 1 の長さ k のパリティベクトルを v(n) $= (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k)$ とし v(n) の要素 v_i の１の個数を d、n に対する $v(n)$ の操作後のリザルタントを m とすると次式が成立する。
(文献 [5] の定理４，文献 [6] の３節と４節参照)

$$m = (3^d/2^k)n + R \tag{1-3}$$

ただし、R はパリティベクトル v(n) の固有の値とみなし、次式で計算する。([6])

$$R = \sum_{i=1}^{k} v_i 2^{i-1} 3^{\delta(i)} / 2^k \qquad ここで \quad \delta(i) = d - \sum_{j=1}^{i} v_j$$

(1-3) 式を整理し、 $q = 2^k R$ と置くと

$$2^k m - 3^d n = q \tag{1-4}$$

となる。 (1-4) 式は、mとnを変数とし、係数の 2^k と 3^d は互いに素であるから一次のディオファントス方程式（*Diophantine equation*）となり、無限個の (m , n) 解が存在する。この無限個の解のnは v(n) のジェネレータであり、補題８より $1 \leq n \leq 2^k$ に対応する値 n_0 は長さがkのパリティベクトルの最小のジェネレータであり一意に決まる。n_0 に伴いリザルタントの解 m_0 も一意に求まる。m , n の一般解は、$n = n_0 + 2^k t, m = m_0 + 3^d t$ で表される。t は、媒介変数で 0 以上の整数である。

【補題９】長さkの未収束のパリティベクトルの１の数がd個のとき、この PV のジェネレータ n と リザルタント m は、(1-4) 式のディオファントス方程式を解いて求めることができる。
(証明) 上記の説明のとおりである。□

以下にいくつか例をあげる。
(例)
(1) 1111000
　$q = 2^0 \times 3^3 + 2^1 \times 3^2 + 2^2 \times 3^1 + 2^3 \times 3^0 = 65$
　方程式 $2^7 m - 3^4 n = 65.$ 　解は n=15, m=10
　一般解 $n = 15 + 2^7 t, m = 10 + 3^4 t$
(2) 1110100
　$q = 2^0 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 2^2 \times 3^1 + 2^4 \times 3^0 = 73$
　方程式 $2^7 m - 3^4 n = 73.$ 　解は n=7 , m=5
　一般解 $n = 7 + 2^7 t, m = 5 + 3^4 t$
(3) 110111001
　$q = 2^0 \times 3^5 + 2^1 \times 3^4 + 2^3 \times 3^3 + 2^4 \times 3^2 + 2^5 \times 3^1 + 2^8 \times 3^0 = 1117$
　方程式 $2^9 m - 3^6 n = 1117.$ 　解は n= 219 , m=314
　一般解 $n = 219 + 2^9 t, m = 314 + 3^6 t$

補題 7〜補題 9 により、長さが k の任意の PV のジェネレータを求める方法は、補題 7 を利用して、PV の先頭の 1 桁目から逐次計算し求めていく方法と、補題 9 のディオファントス方程式を解いて求める方法がある。

1.5 パリティベクトルの分類 (J-conv., A-conv., U-conv.)

PV の先頭の数字が 0 の場合は、その PV に対応するジェネレータ は偶数であるのでストッピングタイムは1、したがって v 収束回数は 1 である。以下、先頭の数字が 1 の PV について調べる。
前述の (1-2) 式の PV の収束条件式をもとにして、長さ 1 から 6 までの PV の収束状況を調べると Table 1-3 のようになる。
収束条件式の log3/log2 は 1.58 として計算している。
Table 1-3 の「太字の数字」は、収束条件式を充足しているもので、「収束状況 (convergence status)」は、1.3 節で説明した PV の収束性の分類に基づいている。なお、「収束状況」の Just は確定収束 PV、Already は 既収束 PV、空白は 未収束 PV を意味する。

Table 1-3 収束条件式によるパリティベクトルの収束状況調査例 or (Appendix 1)

Table 1-4 「長さ」別の確定収束 (J-converged)PV と未収束 (Un converged)PV 例 or (Appendix 1)

---

2 パリティベクトルの生成と個数計算

すべてのパリティベクトルを形式的に分類すると、（1） 1 から無限大までの長さ別に分類する、（2）パリティベクトルに含まれる 1 の個数別に分類する、ことができる。以降、（1）、（2）ごとに J-PV と U-PV の生成方法と

個数計算について説明する。

2.1 長さ別パリティベクトルの生成と個数計算

Table 1-3 と Table 1-4 でパリティベクトルの「長さ」別の J-PV と U-PV を調べた手続きに基づき、長さ k の PV から長さ k +1 の PV の生成する方法とそれらの個数計算の方法がわかる。

2.1.1 長さ別確定収束 PV と未収束 PV の生成方法

長さが k の J-PV や A-PV に 0 または 1 を加えると、k+1 の長さの A-PV になることは明らかである。したがって、k+1 の長さの J-PV または U-PV を生成するには、長さが k の U-PV に 0 または 1 を付け加えればよいことがわかる。

【アルゴリズム 1】 長さが k の未収束 PV から長さが k+1 個の未収束 PV と確定収束 PV を生成するアルゴリズム

（説明）

長さ k の PV 中の 1 の個数を d(k) とする U-PV を V とする。V に x(1 または 0）を付け加えることを $V \oplus x$ と書くことにする。長さが k、1 の個数が d(k) の U-PV から、長さが k +1 個の U-PV と J-PV を求めるアルゴリズムは次のとおりである。長さが k の U-PV が複数個存在するときは、それぞれについて実施する。

手続き 1: $V \oplus 1$ は、長さ k+1 の U-PV である。

手続き 2: $V \oplus 0$ は、PV の収束条件式 (1-2) が成立するか否かによって下記の 2 通りに分かれる。

$(k+1) > d(k+1) \cdot \log(3)/\log(2)$ ならば　長さ k+1 の J-PV となり

それ以外は　長さ k+1 のU-PV となる。

（例）

$\log(3)/\log(2)$ は 1.58 として計算する。(1) 長さが 5 の U-PV の 1 つを V=11011 とすると

手続き 1：V⊕1=110111 は長さが 6 の U-PV

手続き 2：V⊕0=110110 は $6 > 4 \times 1.58$ ではないので、長さが 6 の U-PV である

したがって, 長さ 5 の U-PV（11011）から長さ 6 の 2 つの U-PV（110111,11011 0）が生成される。

(2) 長さが 6 の U-PV の 1 つを V=110110 とすると

手続き 1： V⊕1=1101101 は長さが 7 の U-PV となり

手続き 2： V⊕0=1101100 は　$7 > 4 \times 1.58$　であるから、長さが 7 の J-PV である

したがって, 長さ 6 の U-PV（110110）から長さ 7 の 1 つの U-PV （1101101）と 1 つの J-PV（1101100）が生成される。

なお、生成した未収束 PV と確定収束 PV のジェネレータは、1.4 節で説明したように PV の先頭の 1 桁目から逐次計算して求めていく方法と、ディオファントス方程式を解いて求める方法がある。

上記のアルゴリズム 1 から、Table 2-1 の U-PV リスト、Table 2-2 の J-PV リストが生成されることがわかる。

Table 2-1 「長さ」別の未収束 PV リスト（一部抜粋） or (Appendix 1)

Table 2-2 「長さ」別の確定収束 PV リスト（一部抜粋） or (Appendix 1)

2.1.2 「長さ」別の J-converged PV と未収束 PV の個数計算

PV の長さごとの J-PV と U-PV の個数計算は、2.1.1 で説明したアルゴリズム 1 の中でカウントすることができるが、ここでは、個数計算用の漸化式を立式して計算することにする

（1）長さ別 U-PV の個数計算

先頭が 0 の PV は J-PV あるいは A-PV であるので、先頭が 1 の PV を対象とする。長さ k の PV が U-PV となる条件は、 (1-2) 式の収束条件式の不等号の向きを変えた式で与えられるので、k、d に関するつぎの関数 $\epsilon(k,d)$ を定義する。

$$\epsilon(k,d) = \begin{cases} 1 & : \quad k < d \cdot \log(3)/\log(2) \text{ のとき} \\ 0 & : \quad \text{その他のとき} \end{cases}$$

長さk，1の数がdのU-PVの個数を W(k,d) とする。このとき、① 長さがkのU-PVに1を加えた場合の長さk +1、d+1 のU-PVの個数 W(k+1 ,d+1) と、② 0を加えた場合の長さk +1、d のU-PVの個数 W(k+1,d) はそれぞれ次の式で表される。

$$① \ W(k+1,d+1)=\epsilon(k+1,d+1)\cdot W(k,d)$$
$$② \ W(k+1,d)=\epsilon(k+1,d)\cdot W(k,d)$$

上記の2式から、長さが k+1 の U-PV. の個数 W(k+1,d) は、長さが k の U-PV. の個数 W(k,d) を用いて次の (2-1) 式の漸化式で求めることができる。

$$W(k+1,d)=\epsilon(k+1,d)\{W(k,d)+W(k,d-1)\}, \qquad (2-1)$$

ここで、初期値は、W(1,0)=0, W(1,1)=1, および W(k,d)=0 (d>k).

以上より、長さが k+1 の U-PV の個数 W(k+1) は、(2-1) 式の総和で求められる。

$$W(k+1)=\sum_{d=a}^{b} W(k+1,d), \qquad (2-2)$$

ただし、a=$\lceil (k+1)\cdot log(2)/log(3) \rceil$ ($\lceil y \rceil$ は天井関数で b は b=k+1 である。

(2) 長さ別 J-PV の個数計算

長さがk、1の個数がdの J-PV の個数をX (k,d) とする。長さが k+1 の J-PV は、長さが k の U-PV に0を1つ付け加えて (1-2) 式の収束条件を充足するか否かを調べればわかる。そこで、長さが k の U-PV 中の 1 の数を d とし、k、d に関する関数 $\mu(k,d)$ を, つぎのように定義する。

$$\mu(k,d)=\begin{cases} 1 & : \ k > d\cdot\log(3)/\log(2) \text{ のとき} \\ 0 & : \ \text{その他のとき} \end{cases}$$

そうすると、 X(k+1, d) の個数は、U-PV の個数 W(k,d) を利用して計算でき、長さ k+1 の J-PV は長さ k の U-PV に0を加えて収束の可否を調べればよいので、下記の (2-3) 式が成り立つ。

$$X(k+1,d)=\mu(k+1,d)\cdot W(k,d)(k\geq 1), \qquad (2-3)$$

ただし、初期値は、X(1,0) = 1 および X(1,1) = 0 とする。

以上より、長さが k+1 の J-PV の個数 X(k+1) は、(2-3) の結果の総和となり、

$$X(k+1)=\sum_{d=a}^{b} X(k+1,d), \qquad (2-4)$$

ただし、a=0 および b= $\lfloor (k+1)\cdot log(2)/log(3) \rfloor$ ($\lfloor y \rfloor$ は床関数である)。

以上のことから、次の定理が成り立つ。

【定理1】 長さが k の未収束の W(k) 個のパリティベクトルから生成される、長さが k+1 の未収束のパリティベクトルの個数 W(k+1) は (2-1) 式と (2-2) 式により、さらに確定収束 pv の個数 X(k+1) は、(2-3) 式と (2-4) 式により求めることができる。

（証明） 上記の説明どおりである。□

定理1により、長さ別の J-PV、A-PV、U-PV の個数を計算すると Table 2-3 のようになる。

Table 2-3 「長さ」別の確定収束 PV, 既収束 PV, 未収束 PV の個数集計表 or (Appendix 1)

項目説明: (A) PV の総数 (2^k) (B) 確定収束 PV の個数 (C) 既収束 PV の個数 (D) 未収束 PV の個数 (E) 未収束 PV の比率 D/A

Table 2-3 に、同じ長さの PV の総数と U-PV の個数の比率である「E：未収束比率」を掲載した。長さが増えていくにつれて、未収束比率は限りなく0に近づいていることがわかる。Table 2-3 の「E：未収束比率」の数値は、

Eric Roosendaal の論文 [3] に掲載の $|W_k|/|V_k|$ （発散比率）の数値と合致しており、Riho Terras の論文 [1] の Table A. Values of the distribution function F(k) の補正値と一致することが確認できた。

長さ別の個数計算のコンピュータ出力結果は、下記に示す閲覧用リンクをクリックして確認できる。
[長さ別集計データ] [1 〜 100] [1 〜 1000] [9000 〜 10000]　(Appendix 2)

2.2　「１の個数」別の確定収束 PV、未収束 PV 生成と個数計算

次に、パリティベクトル中に含まれる「１の個数」が同じ個数のグループ別（以降、「１の個数」別と略称する）の J-PV、U-PV の生成と個数計算の方法を考える。

2.2.1　「１の個数」別の確定収束 PV と未収束 PV の生成方法

まず、１の個数別の U-PV を Table 1-3 で調べると、d=1 の U-PV は、V=1 だけであり、d=2 の U-PV は、11 と 110 の 2 個、d=3 の U-PV は、111、1110、1101 の 3 個、d=4 の U-PV は、1111 、11110、 111100、11101、111010、11011、110110 の 7 個である。
同様に、Table 1-3 より、１の個数別の J-PV を調べると、d=1 の J-PV は、V=10 の 1 つ、d=2 の J-PV は、1100 の 1 つ、d=3 の J-PV は、長さ 5 の 11100、11010 の 2 つである。d=4 の J-PV は、1111000、1110100、1101100 の 3 つである。d=5 以降も U-PV と J-PV は、(1-2) 式の収束条件式をもとにして J-conv. および U-conv. を判別しながら生成することができる。その生成アルゴリズムはつぎのように考えることができる。

【アルゴリズム２】 １の個数が d 個の未収束 PV から１の個数が d+1 個の未収束 PV と J-converged PV を生成するアルゴリズム
（説明）長さが k、１の個数が d の U-PV を V とする。V に x(1 または 0) を付け加えることを V⊕x と書くことにする。ここで、A → B は、A の数値（あるいは数列）を B に置き換えるという意味に使用する。
長さが k、１の個数が d の U-PV から、d+1 個の U-PV と J-PV を求めるアルゴリズム 2 は次のとおりである。
１の個数が d の U-PV に 0 を 1 個加えた $V \oplus 0$ が U-PV だとすると、$V \oplus 0$ は１の個数が d の U-PV であるので対象外である。したがって、d+1 個の U-PV を生成するのは、V⊕1 の PV に 0 を追加していくようにすればよい。
U-PV が複数個存在するときは、それぞれについて実施する。
手続き１： V に 1 を付け加えた１の個数が d+1 個の V⊕1 は、長さ k+1 の U-PV である
　　V⊕1 → V、d+1 → d、k+1 → k に置き換える。

手続き２： さらに手続き１または手続き３後の V に 0 を 1 つ加えた PV を長さが k+1 の V⊕0 とする。
　　V⊕0 → V、 k+1 → k に置き換える。

手続き３： 手続き２で作成した PV の収束状況を調べ、
　　$k > d \cdot log(3)/log(2)$ を満足したときは、PV は、J-PV である。手続き終了。
　　そうでなければ、PV は、U-PV である。手続き２を繰り返す。

（実施例）
k=5, d=4 の U-PV を V=11011 とする。上記のアルゴリズム 2 に従ってその過程を記述すると、

手続き１：V=11011 に 1 を加える。V⊕1=110111 は長さ k=6, d=5 の U-PV である。
　　V=110111 とする
手続き２：V に 0 を加えた V⊕0=1101110 を V とし、k=7 とする。
　　１の個数は変わらず 5 である。
手続き３：V=1101110 は、7< 5 × 1.58 であるから　k=7、d=5 の U-PV である
手続き２：V=1101110 に 0 を加え、V⊕0=11011100 を V、k=8 とする。
　　１の個数は変わらず 5 である。
手続き３：V=11011100 は、8> 5 × 1.58 であるから　k=8、d=5 の J-PV である。終了。

この結果 k=5, d=4 の U-PV 11011 から、K=6 の 110111、k=7 の 1101110 の 2 つの U-PV と k=8 の 11011100 の J-PV が 1 つ生成できる。それらの１の個数は、d=5 である。なお、生成した未収束 PV と J-converged PV のジェネレータは、1.3 節で説明したように PV の先頭の 1 桁目から逐次計算し求めていく方法と、1.4 節のディオファントス方程式を解いて求める方法がある。

上記のアルゴリズム 2 を実行することにより、下記の Table 2-4 の U-PV リストと Table 2-5 の J-PV リストが

作成できる。

Table 2-4 「１の個数」別の未収束 PV リスト or (Appendix 1)

Table 2-5 「１の個数」別の確定収束 PV リスト or (Appendix 1)

2.2.2 「１の個数」別 J-converged PV と未収束 PV の個数計算

「１の個数」別の J-PV と U-PV の個数計算は、2.2.1 で説明したアルゴリズム２の中でカウントすることができるが、ここでは、個数計算用の漸化式を立式して計算することにする。

(1) 「１の個数」別 U-PV の個数計算まず、先頭が０の PV は J-PV または A-PV であるので、先頭が１の PV を対象とする。

いま、１の数が d、０の数が u の U-PV の個数を W(d, u) とする。PV が U-PV であるか否かを判断するために、d、u に関するつぎの関数 $\epsilon(d,u)$ を定義する。

$$\epsilon(d,u) = \begin{cases} 1 & : \quad (d+u) < d \cdot \log(3)/\log(2) \text{ のとき} \\ 0 & : \quad \text{その他のとき} \end{cases}$$

この条件を使って、W(d, u) の個数がわかっているとき、W(d+1, u) の個数を求める。

1 の数が d 個、０の数が u 個の U-PV から 1 の数が d+1 個の U-PV は、その U-PV に１を付け加えることによって得られる。したがって、その個数 W(d+1,u) は

$$① \ W(d+1,u) = \epsilon(d+1,u) \cdot W(d,u)$$

さらに、W(d+1,u) の U-PV に０を複数個付け加えることによって生成される PV が U-PV になる個数は②.

$$② \ W(d+1,u+1) = \epsilon(d+1,u+1) \cdot W(d+1,u)$$

上記の①,②式から、1 の数が d+1 個の U-PV の個数は、下記の (2-5) 式より求めることができる。

$$W(d+1,u) = \epsilon(d+1,u)\{W(d,u) + W(d+1,u-1)\}, \tag{2-5}$$

ただし、初期値は、W(1,0)=1, W(1,1)=0, W(d,u)=0 (u<0) である。

以上より、1 の数が d+1 個の U-PV の総数 W(d+1) は、(2-5) 式の結果の総和で求まる。

$$W(d+1) = \sum_{u=a}^{b} W(d+1,u), \tag{2-6}$$

ただし、a=0 および b= $\lfloor (d+1) \cdot log(3)/log(2) - 1 \rfloor$ ($\lfloor y \rfloor$ は床関数である)。

(2) 「１の個数」別 J-PV の個数計算

つぎに、１の個数が d+1 個の J-PV の個数を計算する。

J-PV の個数は、2.2.1 の J-PV と U-PV 生成のアルゴリズム２から得られる。１の個数が d+1 個の J-PV は、１の個数が d 個の U-PV に１を付け加え、そのあとに収束条件を満足するまで０を付け加えれば J-PV が得られる。したがって、１の個数 d+1 の J-PV の個数 X(d+1) は、1 の数が d 個の U-PV の総数 W(d) と同じになり、下記の (2-7) 式が成立する。

$$X(d+1) = W(d) \tag{2-7}$$

以上のことから、次の定理が成り立つ

【定理２】 1 の数が d 個の未収束の W(d) 個のパリティベクトルから生成される、1 の数が d+1 個の未収束のパリティベクトルの個数 W(d+1) は (2-5) 式と (2-6) 式により、さらに just 収束のパリティベクトル の個数 X(d+1) は、(2-7) 式により求めることができる。

（証明） 上記の説明どおりである。□

定理２より、1 の個数別の J-PV と U-PV を計算すると Table 2-6 のようになる。

なお、１の個数が同じの有限/無限の長さの PV のうち、J-PV と U-PV 以外の PV はすべて A-conv. の PV であることは明らかである。

Table 2-6 「１の個数」別の確定収束 PV と未収束 PV の個数集計表 or (Appendix 1)

「１の個数」別の個数計算のコンピュータ出力結果は、下記に示すリンクをクリックして確認できる。
[１の個数別集計データ] [1 ～ 100] [1 ～ 1000] [9000 ～ 10000] or (Appendix 2)

3 パリティベクトル利用によるコラッツ予想の考察

これまで説明してきたパリティベクトルに関する結果や後述するパリティベクトルの特徴等に基づき、我々がコンピュータ利用により獲得した実測データ、そのデータ分析のためのツールの開発、そしてデータ分析結果について説明する。これらの成果物は、コラッツ予想解決の一助になるものと期待する。

3.1 パリティベクトルの図的表示とパリティベクトルの特性値の設定

以降の分析を行うために開発したパリティベクトル俯瞰図と PV の特性値を表すために導入した指標について説明する。

3.1.1 パリティベクトル俯瞰図の役割

J-PV、U-PV、そして A-PV の軌跡を図的表示すると収束状況が視覚的に把握でき分かりやすくなる。そこで、下記の (1) と (2) の機能をもつコンピュータプログラムを作成し、調査・分析作業のツールとして活用した。このパリティベクトルの挙動を表示した図を、PV の俯瞰図（Bird's-eye view of the parity vector）と呼ぶことにする。
(1) 所与のパリティベクトル (PV) の軌跡を表示し、PV の先頭から１つずつ長さを増やした各部分 PV に対応するジェネレータ、ストッピングタイム (グライド、v収束回数と同じ)、比率（ストッピングタイム /部分 PV の長さ）などの特性値を算出し一覧表示する。
(2) 所与の正の整数 N のコラッツ数列がストッピングタイム を持つならば、１に到達するまでの PV を生成し、その PV の軌跡とストッピングタイムおよびトータルストッピングタイムを表示する。

[アルゴリズム３] PV の俯瞰図の骨格を作成し、有限の長さの任意のパリティベクトルを表示するアルゴリズムは、つぎのとおりである。

（説明）PV の長さを k、PV 中の１の数を d としたとき、収束条件式 (1-2) に基づき、k と d と v 収束回数（ストッピングタイム）との関係を算出した Table 1-2 を参照して、俯瞰図の骨格を作成することができる。
① 縦軸を長さ k、横軸を 1 の個数 d とする k-d 座標セルテーブルを作成し、PV の長さごとに v 収束する k と d の対に対応する座標セル (k,d) に"0"を記載する。このセルを確定収束セル (JC セル) と呼ぶことにする。
② 各長さに対応するＪＣセルの繋がりを境界として、その右側の領域を「未収束 *PV* 領域」と呼び、境界の左側の領域を「収束済み *PV* 領域」と呼ぶ。
③ 任意の長さの PV をプロットする方法は次のとおりである。
まず、先頭の数字が"0"の場合は、座標セル (1,0) に"0"を設置する。先頭の数字が"1"の場合は、座標セル (1,1) に"1"を設置する。
④ 2 桁目以降は、"0"の場合は、直下の座標セルに"0"を設置し、"1"の場合は右斜め下の座標セルに"1"を設置する。一般的には、k 桁目の数が設置された座標が（k,d）とすると、k+1 桁目の数は、"0"の場合は、直下の座標セル (k+1,d) に"0"を設置し、"1"の場合は右斜め下の座標セル (k+1,d+1) に"1"を設置する。そして、最後の桁まで④を繰り返す。
⑤ PV のすべての桁がプロットされた時、最後の数が JC セルで止まれば、その PV は即収束 PV(J-PV) であることを意味し、JC セルに到達していなければ未収束の PV（U-PV）であることを示す。さらに、JC セルを通り越している PV は、すでに収束済みの PV(A-PV) になる。

Figure 1 は (1) の例で、長さ 13 の PV= 1111011100010 を入力した軌跡図である。Figure 1 の表中の左の欄の k は PV の長さを示し、見出しの d の数字は、PV 中の 1 の数の累計数を示す。Figure 2 は、PV の先頭からの長さ別の部分 PV の特性値一覧である。

Figure 1 PV（パリティベクトル）の軌跡の図的表現（PV 俯瞰図））or (Appendix 1)

Figure 2 PV（パリティベクトル) の長さ別属性値の例 or (Appendix 1)

Figure 3 に長さ 7 の J-PV の 1101100（ジェネレータ=59)、長さ 11 の U-PV11011111010（ジェネレータ=27)、長さ 11 の A-converged PV 11011010001（ジェネレータ=123）の軌跡を表示する。

Figure 3 確定収束 PV、未収束 PV、および既収束 PV の軌跡の事例 or (Appendix 1)

[デモンストレーション 2] (1) のパリティベクトルの軌跡の図的表示と部分 PV の属性は Program 2 をクリックして確認できる。このプログラムのソーステキスト（PHP,Python) は Appendix 2 からダウンロードできる。

Figure 4 は (2) の例示である。

Figure 4 正の整数 N の PV(パリティベクトル) の図的表現 or (Appendix 1)

[デモンストレーション 3] (2) の正の整数 N のパリティベクトルの軌跡の図的表示は Program 3 をクリックして確認できる。このプログラムのソーステキスト（PHP,Python) は Appendix 2 からダウンロードできる。

3.1.2 PV の特性値「PV の収束度率 (PV Convergence Ratio)」の指標について

3.1.1 のパリティベクトルの俯瞰図作成プログラムの機能説明 (1) で触れた、PV の特性値として次の 2 つの指標を設定する。

(1) ST 収束度率（ストッピングタイムを利用)：ある整数 (ジェネレータ) の PV の長さとその PV のストッピングタイム（グライドあるいは v 収束回数）の比率

ST 収束度率 ＝ ストッピングタイム / PV の長さ

(2) TST 収束度率（トータルストッピングタイム利用)：ある整数 (ジェネレータ) の PV の長さとコラッツ数列が 1 に到達するまでの回数（トータルストッピングタイムあるいは Delay）の比率

TST 収束度率 ＝ トータルストッピングタイム / PV の長さ

これらの比率は、ある長さの PV と、確定収束する PV の長さおよび 1 に収束するまでの PV の長さとを比較するものである。それぞれ元の PV の長さの何倍で収束するかを示す指標である。数値が大きければ大きいほど収束するまでの軌跡が長いことを意味する。これらの指標は、後続のデータ分析にて活用する。
以下に、ST 収束度率と TST 収束度率の例を示す。

(例)

① 長さ 4 の 1101(ジェネレータは 11) のストッピングタイムは 5 でトータルストッピングタイムは 10、つまり確定収束 PV(11010) の長さは 5 である。したがって、ST 収束度率=5/4 = 1.25、TST 収束度率=10/4 = 2.5 となる

② 長さ 5 の 11011(ジェネレータは 27) のストッピングタイムは 59 でトータルストッピングタイムは 70、つまり確定収束 PV の長さは 59 である。したがって、ST 収束度率=59/5=11．8、TST 収束度率=70/5=14 となる。

③ 長さ 15 の 111111111111111(ジェネレータは 32767) のストッピングタイムは 51 でトータルストッピングタイムは 85、つまり確定収束 PV の長さは 51 である。したがって、ST 収束度率=51/15=3.4、TST 収束度率=85/15≈5.67 となる

④ 長さ 12 の 110011101011(ジェネレータは 1491) のストッピングタイムは 4 でトータルストッピングタイムは 60、つまり PV の長さは 12 であるが、収束回数は 4 の A-PV なので、ST 収束度率=4/12 ≈ 0.333 は 1 未満、TST 収束度率=60/12= 5 となる。

⑤ 長さ 18 の 110111111010101000(ジェネレータは 68891) のストッピングタイムは 18 でトータルストッピングタイムは 113、つまり長さが 18 の確定収束 PV である。したがって、ST 収束度率=18/18=1、で TST 収束度率=113/18≈6.28 である。

以上の例から分かるように、ST 収束度率が 1 の PV は J-PV であり、1 以上の PV は U-PV、そして、1 未満の PV は、A-PV である。なお、ST 収束度率の大小は、PV の長さとは無関係である。

3.2 パリティベクトルに関する各種の特性データとそれらの分析結果について

3.2.1 長さ別の J-PV と U-PV の個数計算の結果について

2.1.2 節で長さ別の J-PV と U-PV の個数計算をし、Table 2-3 に長さ別の未収束率を掲載した。その率は、PV の長さ k を無限に増加させていくと限りなく 0 に近づいていくことが確認できる。当然、対象とする PV の長さは無限に大きくなるので、ある長さの PV グループの未収束率が決して 0 になることはない。
しかし、Riho Terras（文献 [1]）が証明したコラッツ y 予想と同値の**「N > 1 のほとんどすべての整数 N は、有限のストッピングタイム をもつ」**（文献 [2]Terras の定理参照）という事実を裏付ける実測データをいくつか示すことができる。

以下にそれらのデータを示し分析を試みる

[データ分析１] 剰余類 $N_r = \{2^5 m + r\}$ 別データの PV 収束度率について

すべての N¿1 の整数 N は剰余 r によって分類される 32 個の剰余類のある $N_r = \{2^5 m + r\}(0 \leq r < 2^5)$ に属する。それぞれの剰余類 N_r のストッピングタイムは、1.2 節の Table 1-1 で示したように、r=7,15,27,31 以外の r の場合は、５以下のストッピングタイムである。計算は省略するが、それらの剰余類の各整数をジェネレータとする PV の ST 収束度率を求めるとすべて 1 未満となる。
つぎに、r=7,15,27,31 の各剰余類別の整数に対応する PV の収束度率を求め、長さ別の最大 ST 収束度率と最大 TST 収束度率、およびそれぞれに対応する PV（ジェネレータ）をまとめると下記の Table 3-1 のようになる。(1≤ $k \leq 35$)

Table 3-1 剰余類 $N_r = \{2^5 m + r\}$ (r=7, 15, 27, 31) 要素の ST 収束度率 or (Appendix 1)

表中の太字の数は、各同一長さの r=7, 15, 27 ,31 剰余類の中で最大の ST 収束度率を示す。
r=7, 15, 27 ,31 の剰余類別に、ST 収束度率をプロットすると、Figure 5 のようになる。

Figure 5 剰余類 $N_r = \{2^5 m + r\}$ (r=7, 15, 27, 31) 要素の St 収束度率グラフ or (Appendix 1)

Figure 5 で分かるように、長さが 1 以上 35 以下の範囲のデータであるが、r=7, 15, 27, 31 の 4 つの剰余類の整数はすべてストッピングタイムをもち、長さが 5 以上から増加するにしたがってＳＴ収束度率は緩やかに増加していく傾向にある。

[データ分析 2] グライドに関する指標データについて
つぎに、コンピュータを利用して実測したグライド (ストッピングタイム) に関するグライドレコード (Glide Record) と K-max-G(N)、そしてそれらのデータの ST 収束度率をまとめたものを Table 3-2 に、K-max-G(N) の ST 収束度率のグラフを Figure 6 に示す。

グライドレコード (Glide Record) とは、Eric Roosendaal（文献 [2]）が定義した指標である。ある正の整数 N のグライドを G(N) と表すと、M < N なるすべての整数 M に対して G(M) < G(N) が成立するとき、N をグライドレコードとよぶ。
例えば、整数 1 と 2 は明白なグライドレコードであるが、それ以外では、G(3)=4、G(7)=7、G(27)=59、G(703)=81 の 3, 7, 27, 703 などが該当する。表中のグライドレコードのデータは Eric Roosendaal が複数の研究者の実測データをまとめて編集したものでインターネットに公開されているものである。

K-max-G(N) は、グライドレコードより細かいデータでジェネレータ N の区間 $[2^k, 2^{k+1} - 1]$ $(k \geq 0)$ ごとの整数 N のグライドを実測し、各区間ごとの最大のグライド を示したものである。2 の 40 乗以上は、欠測データであるが、一部の区間のデータはグライドレコードのデータを共有した。Table 3-2 のグライドデータの意義は、長さ k が 1〜61 の PV に対応するすべての整数値はすべて収束することを意味していること、特に、各区間 $[2^k, 2^{k+1} - 1](0 \leq k \leq 61)$ において k-Max-G(N)（グライドの最大値）の存在は、各区間に属する整数値はすべて収束する（有限のグライドを持っている）ことを示している。

Table 3-2 グライドレコード (Glide Record) と K-Max-G(N) の ST 収束度率 or (Appendix 1)

さらに、Figure 6 から各区間の K-max-G(N) の ST 収束度率は、約 18 以下で PV の長さが増加しても急激に大

きく変化することはないと推測できるが理論的に保証することはできない。

Figure 6 K-Max-G(N) の ST 収束度率グラフ or (Appendix 1)

3.2.2 「1 の個数」別の J-PV と U-PV の個数計算の結果について

2.2 節で「1 の個数」が k 個の U-PV から k+1 個の J-PV と U-PV を生成してその個数計算を行った。その結果からつぎのような事実が確認できた。

(1)「1 の個数が d 個」の U-PV のいくつか（すべてではない）は、同じ「1 の個数が d 個」グループ内の J-PV に収束する。

(2) (2-7) 式の X(d+1)= W(d) から「1 の個数が d+1 個」の J―PV の個数は、「1 の個数が d 個」の U-PV の個数と同じ個数である。したがって、

$$\sum_{d=1}^{n}(X(d+1)-W(d))=0 \qquad (2-8)$$

が成立する。
上記のことを、Table 3-3 の事例で説明する。

Table 3-3 「1 の個数」別の確定収束 PV と未収束 PV の関係 or (Appendix 1)

表中の太線枠で囲んだ部分の PV は、下記の (A) と (B) である。

(A) 「1 の数が 4 個」の 3 つの J-PV
 ① 1101100 (59),② 1110100 (7), ③ 1111000 (15)

(B) 「1 の数が 4 個」の長さが異なる U-PV
 ⓐ 11011(27),110110(59),ⓑ 11101(7), 111010(7), ⓒ 1111(15),11110 (15), 111100 (15)

「1 の数が 4 個」の上述以外の PV はすべて A-PV である。
ちなみにⓐ ,ⓑ , ⓒの U-PV は、「1 の数が 3 個」の 3 つの U-PV 1101,1110,111 から生成された PV である。

ここで、ⓐの U-PV 110110(59) は、0 を付け加えることによって①の J-PV 1101100(59) になる。つまり、ジェネレータの 59 は収束する。しかし、ⓐの U-PV 11011(27) は、「1 の数が 4 個」のグループの中では J-PV にならない。同様に、ⓑの 2 つの U-PV は?の J-PV になり、ⓒの 3 つの U-PV は③の J-PV になる。すなわち、この例では、「1 の数が 4 個」の U-PV の 7 個のうち、6 個は収束するが、1 個は未収束である。加えて、表中で分かるように「1 の数が 5 個」の J-PV の個数は 7 個であり、「1 の数が 4 個」の U-PV の個数 7 個と合致する。

結論として、「1 の数が d 個」のグループの U-PV は、そのすべてが同じグループ内で収束することは保証されないが、その個数と同じだけ、「1 の数が d+1 個」の PV グループ内で収束する J-PV が存在する。

つぎに、特徴あるデータの分析として、前述した PV の俯瞰図の未収束領域の上限の PV データと下限の PV データを取り上げる。

[データ分析 3] 未収束領域の上限の PV（ Upper limit PV data in 未収束領域）

未収束領域の上限の PV は、すべて 1 の PV であるのでジェネレータは、$2^n-1(n\geq 1)$ で表すことができる。
$2^n-1(n\geq 5)$ の整数は、 $N_{31}=\{2^5m+31\}$ に属する数である。

下記に、$1\leq n\leq 10000$ の値についての ST 収束度率とそれらをプロットした Figure 7 を掲載する。
2^n-1 の PV の ST 収束度率は、$n\geq 500$ では 3 から 5 以内で、フラットなグラフである。2^n-1 の整数は、すべて有限のグライドをもつものと予想される。

Figure 7 俯瞰図上限 PV のジェネレータ=2^n-1(n: 1〜10000) の ST 収束度率グラフ or (Appendix 1)

さらに、補題 2 で述べたように、指定されたストッピングタイム (グライド) を持つ整数 (ジェネレータ) を求める方法として、収束しない領域の上限 PV を利用することが可能である。
ストッピングタイム= k の J-PV を求めるには、まず、上限 PV における連続する 1 の数を d とする。そして、収束条件式 $k>d\cdot log(3)/log(2)$、すなわち $d<k\cdot log(2)/log(3)$ を満たす最大の整数 d を求める。そうすると、目的の J-PV は d 個の 1 とそれに続く (k-d) 個の 0 を持つことになる。

たとえば、k=10 の場合、d=6 となるので、J-PV の候補は 1111110000 となる。この PV のジェネレータは 575 で、ストッピングタイムは 10 となる。ジェネレータは、補題 7 に基づく逐次計算または 1.4 節で説明したディオファントス方程式を解くことによって計算できる。

[デモンストレーション 4] 指定したストッピングタイム (グライド) を持つ整数 (ジェネレータ) は、Program 4 をクリックして求めることができる。このプログラムのソーステキスト（PHP,Python) は Appendix 2 からダウンロードできる。

さらに、$M = 2^k - 1$ とおいたとき、k が奇数の場合（k=2n-1）と偶数 (k=2n) の場合の、2 つのコラッツ数列にはつぎのような関係が成り立つ。ただし、n は同一の整数とする。

【補題 10】 $M_1 = 2^{2n-1} - 1, M_2 = 2^{2n} - 1$ とすると、M_1 と M_2 の 2 つのコラッツ数列の要素が一致するものが存在する。
（証明） $S_0(M) = 2^k - 1$ とおいたとき、コラッツ操作を k 回繰り返すと $S_k(M) = 3^k - 1$ となる。
① $S_0(M_1) = 2^{2n-1} - 1$ 、(2n-1) 回のコラッツ操作で $S_{2n-1}(M_1) = 3^{2n-1} - 1$　となる。これは、偶数であるから $(3^{2n-1} - 1)/2$ を変形すると
$(3^{2n-1} - 1)/2 = (3 \times 3^{2(n-1)} - 1)/2 = \{2 \times 3^{2(n-1)} + (3^{2(n-1)} - 1)\}/2 = 3^{2(n-1)} + (3^{2(n-1)} - 1)/2$ となり、奇数＋偶数＝奇数　となる。したがって、
$S_{2n}(M_1) = (3^{2n-1} - 1)/2$
$S_{2n+1}(M_1) = \{3 \times ((3^{2n-1} - 1)/2) + 1\}/2 = ((3^{2n} - 3)/2 + 1)/2 = (3^{2n} - 1)/4.$
となる。
② 他方、$S_0(M_2) = 2^{2n} - 1$ は 2n 回のコラッツ操作で $S_{2n}(M_2) = 3^{2n} - 1$。
$S_{2n}(M_2) = 3^{2n} - 1 = (3n + 1)(3n - 1)$ は 偶数 × 偶数となるので
$S_{2n+1}(M_2) = (3^{2n} - 1)/2$, $S_{2n+2}(M_2) = (3^{2n} - 1)/4$ となる。

①と②より $S_{2n+1}(M_1) = (3^{2n} - 1)/4 = S_{2n+2}(M_2)$ が成立し、M_1 と M_2 の 2 つのコラッツ数列の要素が一致するものが存在する。□

補題 10 が成立することは、n が同一の整数の時、$M_1 = 2^{2n-1} - 1$ が 1 に収束すれば（トータルストッピングタイムを持てば)、$M_2 = 2^{2n} - 1$ も 1 に収束する（トータルストッピングタイムを持つ)。
また、$M_1 = 2^{2n-1} - 1$ が、無限に 1 に収束しなければ、$M_2 = 2^{2n} - 1$ も無限に 1 に収束しないことになる。それぞれの逆も成り立つことを意味する。

[データ分析 4] 未収束領域の下限の PV （Lower limit PV data of the 未収束領域）
まず、未収束領域の下限の PV はどのようなストリングになるかそのアルゴリズムを考える。

【アルゴリズム 4】 未収束領域の下限の PV は次のようにして求めることができる

（説明）あらかじめ、Figure 1 の PV 俯瞰図が作成されていることを前提にし、その縦軸の「長さ (k)」と横軸の「1 の個数 (d)」のセルの座標を (k,d) と表記する。以下の説明中、PV 俯瞰図の確定収束セル（数字が 0 のセル）は JC セルと略す。

未収束領域の下限の PV は、(1,0) の JC セルの右側のセル座標 (1,1) に 1 を設定することから始まる。

その後は、JC セルの座標が (k , d) のときはその右側のセル (k , d+1) に 1 を設置する。JC セルが無い長さ k+1 の行は、1 が設定されているセル (k,d+1) の直下の セル (k+1,d+1) に 0 を設置する。

この操作を続けることによって未収束領域の下限の PV を作成することができる。

[デモンストレーション 5] 未収束領域の下限の PV は、Program 5 をクリックして作成できる。このプログラムのソーステキスト（PHP,Python) は Appendix 2 からダウンロードできる。

その操作によって下限の PV の長さを 1000 まで作成するとそのストリングは下記のとおりになる。

Lower Limit PV

1101101101011011010110110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101011011
0101101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101011
0110101101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110101101101
0110110101101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011010110101101
1010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011010110110101101
1010110110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011010110110101
1011010110110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101010110110110
1011011010110110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101010110110
1101011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011010110
1101011011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101101011011010110110101101011011010

【補題 11】 未収束領域の下限の PV の長さが 5 以上の k 桁 $(k \geq 5)$ の PV の各ジェネレータは, $2^5m + 27$ の整数である。

(証明) この PV の 5 以上の長さの各ジェネレータは、先頭の 5 けたのストリングは 11011 であるので、そのジェネレータは 27、その後は 1 または 0 を付け加えて、長さが 1 増えていくのでそれらのジェネレータは、$2^5m + 27$ で表すことができる。したがって、下限の PV の先頭から長さ k(≥ 5) 桁以上の各 PV のジェネレータは、$\{2^5m + 27\}(m \geq 0)$ に属することがわかる。□

このデータ分析では、10,000 桁の長さの PV を生成して、ST 収束度率を計算し、それらをプロットした図を Figure 8 に示す。

下限の PV の ST 収束度率は、ほとんどが 2 倍以内で、長さが 10 以上のグラフはフラットである。

Figure 8 俯瞰図下限 PV の (1〜10000) の ST 収束度率グラフ or (Appendix 1)

ちなみに、下限の PV の任意の位置の 1 を 0 に替えると、その位置までの長さ（例えば k）の PV は収束しストッピングタイム ＝ k となることがわかる。したがって、ストッピングタイムが k の Just PV を求めるときは、下限の PV の先頭から k 桁目の 1 を 0 に替えれば良い。

[デモンストレーション 6] 補題 2 に記載した「指定したストッピングタイム (グライド) をもつ整数を求める」には、上述の「下限の PV による方法」が利用できる。その具体的な手続きは、Program 6 をクリックして確認できる。このプログラムのソーステキスト（PHP,Python) は Appendix 2 からダウンロードできる。

4 結論

前述した 3.1 節のパリティベクトルの俯瞰図を眺めて、「すべての PV が収束する（ストッピングタイムを持つ)」という命題が、肯定的に成立すると予想できる根拠となる実測データの分析結果をまとめる。
以下、俯瞰図の縦軸の PV の長さ（k）の観点から眺めた場合と、俯瞰図の横軸の「PV 中の 1 の個数 (d)」の観点から眺めた場合の 2 つに分けて考察する。

(1) PV の長さ (k) の観点からの考察
k の値が小から大に向かって（縦軸の上から下に向かって)、同じ長さのすべての PV（対応するジェネレータ）は有限のグライドをもつものと予想できる。その根拠は Table 2-3 に示すように、同じ長さの PV の総数と U-PV の個数の比率である「E：未収束比率」は、長さが増えていくにつれて、限りなく 0 に近づいていく。

例えば、長さが 10000 の PV（ジェネレータで表すと 1〜2^{10000}）の場合、未収束率は $2.394397e - 156$ となり、極小の率である。しかし、長さ $k \to \infty$ としても、未収束率は 0 になることはない。その理由は、長さが k の未収束 PV（ジェネレータ=N）に 1 をつけ加えた長さ k+1 の PV は、必然的に未収束 PV(ジェネレータは N か N+2k) になるからである。したがって、必要な調査は、同じ長さの未収束 PV がすべて収束するとすればいつ収束するかがわかると良い。その点については、数学的・論理的な証明はできていないが、上述したデータ分析により「長さが k の未収束 PV（ジェネレータ=N）はすべて長さが $k + p(0 < p < \infty)$ の PV（ジェネレータ=N）で収束する」ということが推測できることである。

① [データ分析 1] の整数 $N = 2^5m + r$ の r=7, 15, 27, 31 の 4 つの剰余類の長さ別 PV の最大 ST 収束度率の実測データから「4 つの剰余類のすべては、長さの増加に伴い最大 ST 収束度率は有限の大きさで緩やかに増加していく」傾向が確認できる。

② [データ分析 2] のグライドレコードおよび K-Max-G(N) の指標データの分析から、長さが k の未収束 PV は、長さが $k + p(0 < p < \infty$、k+p は、長さ k に属する PV のグライドレコード または k-Max-G(N) である）の PV グループですべて収束することを示している。

③ [データ分析 3] の PV 俯瞰図の未収束領域の上限の $PV = 111111\cdots$(ジェネレータは $2^k - 1, 0 < k$) は、Figure 7 でわかるようにその ST 収束度率は、$k \geq 500$ のとき 3 以上 5 以下の値であると推測できる。したがって、$2^k - 1$ の整数は、すべて有限のグライドをもつものと予想される。

④ [データ分析４] の未収束領域の下限の PV の場合、長さが 10 以上の PV の ST 収束度率は、2 以下である。下限の PV の部分 PV に対応するジェネレータは、すべて有限のグライドをもつものと予想される。

(2) 「1 の個数 d」の PV の観点からの考察

ｄの値が小から大に向かって（横軸の左から右に向かって）、その「1 の個数」が同じ PV は、すべて収束していく状況が見られる。その根拠は、3.2.2 の J-PV と U-PV の個数計算から得られた、「1 の個数が d 個」の U-PV の個数は、「1 の個数が d+1 個」の J-PV の個数と同じ個数である。そして、「1 の個数が d+1 個」の J-PV は、「1 の個数が d+1 個」の U-PV に 0 をいくつか付け加えたものである。このことは、d の数が有限個の U-PV は、すべて収束することを示唆する。しかしながら、無限に発散する U-PV が存在するならば、この事実は成立しないことを付け加えたい。

以上、Collattz 予想が肯定的に成立する証明はできなかったが、コラッツ予想が成立するであろうという裏付けのデータは示すことができたと確信する。
我々の研究成果が、パリティベクトルを利用してコラッツ予想を解決することを目指す研究者にとって役立つ情報であることを期待する。

(利益相反)

著者は、この論文の出版に関して利益相反がないことを宣言します。

(謝辞)

本論文の作成にあたりご支援をいただいた下記の各氏に謝意を表します。
岡田政則氏（博士 [情報科学]、前金沢学院大学教授）には、コラッツ問題やプログラミングの技術的な問題について様々な情報を提供していただいた。
樋川浩史氏（理学修士、数学教育専門家）には、本論文の原稿を細部にわたって校閲していただき、貴重な助言をいただいた。
そして樋川嘉子とその家族には、樋川和伸が後期高齢者の現在に至るまでの長い年数、心身ともに支援してくれました。

参考文献

[1] Riho Terras, *A Stopping Time Problem on the Positive Integers* Acta. Arithmetica, vol.30(1976), pp.241-252, DOI 10.4064/aa-30-3-241-252,
http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa30/aa3034.pdf

[2] Eric Roosendaal, *The Terras Theorem, in "On The 3x + 1 Problem"*,
http://www.ericr.nl/wondrous/terras.html

[3] Eric Roosendaal, *On The 3x + 1 Problem*,
http://www.ericr.nl/wondrous/index.html.

[4] Mike Winkler, *New Results on the Stopping Time Behavior of the Collatz 3x + 1 Function*, DOI 10.48550/arXiv.1504.00212 (2015),
https://arxiv.org/abs/1504.00212 [math.GM]

[5] Mike Winkler, *The Recursive Stopping Time Structure of the Function*, DOI 10.48550/arXiv.1709.03385 (2018),
https://arxiv.org/abs/1709.03385 [math.GM]

[6] David C. Kay, *Collatz Sequences and Characteristic Zero-One Strings:Progress on the 3x + 1 Problem*, American Journal of Computational Mathematics, 2021, vol.11, pp.226-239, DOI 10.4236/ajcm.2021.113015,
https://www.scirp.org/pdf/ajcm_2021092915185466.pdf

APPENDIX 1

(図表：Tables and Figures)

Table 1-1　剰余類 $N_r = \{2^5 m + r\}$ 要素のストッピングタイム

r	偶数	1,5,9,13,17,21,25,29	3,19	11,23	7,15,27,31
σ(Nr)	1	2	4	5	存在するとき 6以上

Table 1-2　PV の長さ k、1 の個数 d(j) および v 収束回数の間の関係

長さ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d(j)	0	1		2	3		4	5		6
v収束回数 j	1	2		4	5		7	8		10
長さ k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d(j)	6	7	8		9	10		11		12
収束回数 j		12	13		15	16		18		20
長さ k	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
d(j)	13		14	15		16	17		18	
v収束回数 j	21		23	24		26	27		29	
長さ k	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
d(j)	19	20		21	22		23		24	25
v収束回数 j	31	32		34	35		37		39	40
長さ k	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
d(j)	25	26	27		28	29		30		31
v収束回数 j		42	43		45	46		48		50

Table 1-3　収束条件式による PV(パリティベクトル) の収束状況調査例

PV 長さ ↓	収束回数 → / PVの長さ →	1 (1)	2 (2)	2 (3)	4 (4)	5 (5)	PVの収束状況 (下注参照)
1	0	**0**					Just
	1	1.58					
2	11	1.58	3.16				
	10	1.58	**1.58**				Just
3	111	1.58	3.16	4.74			
	110	1.58	3.16	3.16			
	101	1.58	**1.58**	3.16			Already
	100	1.58	**1.58**	**1.58**			Already
4	1111	1.58	3.16	4.74	6.32		
	1110	1.58	3.16	4.74	4.74		
	1101	1.58	3.16	3.16	4.74		
	1011	1.58	**1.58**	3.16	4.74		Already
	1100	1.58	3.16	3.16	**3.16**		Just
	1010	1.58	**1.58**	3.16	**3.16**		Already
	1001	1.58	**1.58**	**1.58**	**3.16**		Already
	1000	1.58	**1.58**	**1.58**	**3.16**		Already
5	11111	1.58	3.16	4.74	6.32	7.9	
	11110	1.58	3.16	4.74	6.32	6.32	
	11101	1.58	3.16	4.74	4.74	6.32	
	11011	1.58	3.16	3.16	4.74	6.32	
	10111	1.58	**1.58**	3.16	4.74	6.32	Already
	11100	1.58	3.16	4.74	4.74	**4.74**	Just
	11010	1.58	3.16	3.16	4.74	**4.74**	Just
	11001	1.58	3.16	3.16	**3.16**	**4.74**	Already
	10110	1.58	**1.58**	3.16	4.74	**4.74**	Already
	10101	1.58	**1.58**	3.16	**3.16**	**4.74**	Already
	10011	1.58	**1.58**	**1.58**	**3.16**	**4.74**	Already
	11000	1.58	3.16	3.16	**3.16**	**3.16**	Already
	10100	1.58	**1.58**	3.16	**3.16**	**3.16**	Already
	10010	1.58	**1.58**	**1.58**	**3.16**	**3.16**	Already
	10001	1.58	**1.58**	**1.58**	**1.58**	**3.16**	Already
	10000	1.58	**1.58**	**1.58**	**1.58**	**1.58**	Already

PV 長さ ↓	収束回数 → / PVの長さ →	1 (1)	2 (2)	2 (3)	4 (4)	5 (5)	5 (6)	PVの収束状況 (下注参照)
6	111111	1.58	3.16	4.74	6.32	7.9	9.48	
	111110	1.58	3.16	4.74	6.32	7.9	7.9	
	111101	1.58	3.16	4.74	6.32	6.32	7.9	
	111100	1.58	3.16	4.74	6.32	6.32	6.32	
	111011	1.58	3.16	4.74	4.74	6.32	7.9	
	111010	1.58	3.16	4.74	4.74	6.32	6.32	
	111001	1.58	3.16	4.74	4.74	**4.74**	6.32	Already
	111000	1.58	3.16	4.74	4.74	**4.74**	**4.74**	Already
	110111	1.58	3.16	3.16	4.74	6.32	7.9	
	110110	1.58	3.16	3.16	4.74	6.32	6.32	
	110101	1.58	3.16	3.16	4.74	**4.74**	6.32	Already
	110100	1.58	3.16	3.16	4.74	**4.74**	**4.74**	Already
	110011	1.58	3.16	3.16	**3.16**	**4.74**	6.32	Already
	110010	1.58	3.16	3.16	**3.16**	**4.74**	**4.74**	Already
	110001	1.58	3.16	3.16	**3.16**	**3.16**	**4.74**	Already
	110000	1.58	3.16	3.16	**3.16**	**3.16**	**3.16**	Already
	101111	1.58	**1.58**	3.16	4.74	6.32	7.9	Already
	101110	1.58	**1.58**	3.16	4.74	6.32	6.32	Already
	101101	1.58	**1.58**	3.16	**4.74**	**4.74**	6.32	Already
	101100	1.58	**1.58**	3.16	**4.74**	**4.74**	**4.74**	Already
	101011	1.58	**1.58**	3.16	**3.16**	**4.74**	6.32	Already
	101010	1.58	**1.58**	3.16	**3.16**	**4.74**	**4.74**	Already
	101001	1.58	**1.58**	3.16	**3.16**	**3.16**	**4.74**	Already
	101000	1.58	**1.58**	3.16	**3.16**	**3.16**	**3.16**	Already
	100111	1.58	**1.58**	**1.58**	**3.16**	**4.74**	6.32	Already
	100110	1.58	**1.58**	**1.58**	**3.16**	**4.74**	**4.74**	Already
	100101	1.58	**1.58**	**1.58**	**3.16**	**3.16**	**4.74**	Already
	100100	1.58	**1.58**	**1.58**	**3.16**	**3.16**	**3.16**	Already
	100011	1.58	**1.58**	**1.58**	**3.16**	**4.74**	6.32	Already
	100010	1.58	**1.58**	**1.58**	**3.16**	**4.74**	**4.74**	Already
	100001	1.58	**1.58**	**1.58**	**3.16**	**3.16**	**4.74**	Already
	100000	1.58	**1.58**	**1.58**	**3.16**	**3.16**	**3.16**	Already

（注）Just は確定収束PV、Alreadyは既収束PV、収束状況が空白のPVは、un converged(未収束)PVである。

Table 1-4　「長さ」別の確定収束 (J-converged)PV と未収束 (Un converged)PV 例

PVの長さ	1	2	3	4	5	6
PV中の 1 の個数	0	1	1	2	3	3
v 収束回数	1	2		4	5	
Number of 確定収束PVの個数	1	1	0	1	2	0
確定収束PV	0	10		1100	11100	
					11010	

PVの長さ	1	2	3	4	5	6	
未収束PVの個数	1	1	2	3	4	8	
未収束PV	1	11	111	1111	11111	111111	111110
			110	1110	11110	111101	111100
				1101	11101	111011	111010
					11011	110111	110110

Table 2-1　「長さ」別の未収束 PV リスト（一部抜粋）

PVの長さ	1	2	3	4	5	6	7	8	9		10				11
v 収束回数	1	2		4	5		7	8			10				
未収束PVの個数	1	1	2	3	4	8	13	19	38		64				128
未収束PV	1	11	111	1111	11111	111111	1111111	11111111	111111111	111111110	1111111111	1111111101	1111111110	1111111100	
			110	1110	11110	111101	1111011	11110111	111101111	111101110	1111011111	1111011101	1111011110	1111011100	省略
				1101	11101	111011	1110111	11101111	111011111	111011110	1110111111	1110111101	1110111110	1110111100	
					11011	110111	1101111	11011111	110111111	110111110	1101111111	1101111101	1101111110	1101111100	
						111110	1111101	11111011	111110111	111110110	1111101111	1111101101	1111101110	1111101100	
						111100	1111001	11110011	111100111	111100110	1111001111	1111001101	1111001110	1111110100	
						111010	1110101	11101011	111010111	111010110	1110101111	1110101101	1110101110	1111111000	
						110110	1101101	11011011	110110111	110110110	1101101111	1101101101	1101101110		
							1111110	11111101	111111011	111111010	1111110111	1111110101	1111110110		
							1111010	11110101	111101011	111101010	1111010111	1111010101	1111010110		
							1110110	11101101	111011011	111011010	1110110111	1110110101	1110110110		
							1101110	11011101	110111011	110111010	1101110111	1101110101	1101110110		
							1111100	11111001	111110011	111110010	1111100111	1111100101	1111100110		
								11111110	111111101	111111100	1111111011	1111111001	1111111010		
								11110110	111101101	111101100	1111011011	1111011001	1111011010		
								11101110	111011101	111011100	1110111011	1110111001	1110111010		
								11011110	110111101	110111100	1101111011	1101111001	1101111010		
								11111010	111110101	111110100	1111101011	1111101001	1111101010		
								11111100	111111001	111111000	1111110011	1111110001	1111110010		

Table 2-2　「長さ」別の確定収束 PV リスト（一部抜粋）

PVの長さ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
PV中の１の個数	0	1	1	2	3	3	4	5	6	7	8
v 収束回数	1	2		4	5		7	8		10	
確定収束PVの個数	1	1	0	1	2	0	3	7	0	12	0
確定収束PV	0	10		1100	11100		1111000	11111000		1111110000	
					11010		1110100	11110100		1111101000	
							1101100	11110010		1111100100	
								11101100		1111011000	
								11101010		1111010100	
								11011100		1111001100	
								11011010		1110111000	
										1110110100	
										1110101100	
										1101111000	
										1101110100	
										1101101100	

Table 2-3「長さ」別の確定収束 PV, 既収束 PV, 未収束 PV の個数集計表

PVの長さ (k)	(A)*1	(B)	(C)	(D)	(E)
1	2^1	1	0	1	0.5
2	2^2	1	2	1	0.25
3	2^3	0	6	2	0.25
4	2^4	1	12	3	0.1875
5	2^5	2	26	4	0.125
6	2^6	0	56	8	0.125
7	2^7	3	112	13	0.1015625
8	2^8	7	230	19	0.07421875
9	2^9	0	474	38	0.07421875
10	2^10	12	948	64	0.0625
20	2^20	2652	1018596	27328	2.60620E-02
30	2^30	0	1060970550	12771274	1.189418E-2
40	2^40	8.202367E+08	1.092288E+12	6.402835E+9	5.823345E-03
50	2^50	2.483696E+11	1.121917E+15	3.734259E+12	3.316689E-03
60	2^60	0	1.150705E+18	2.216134E+15	1.922191E-03
70	2^70	1.331807E+17	1.179216E+21	1.241504E+18	1.051594E-03
80	2^80	5.202813E+19	1.208070E+24	8.032099E+20	6.643997E-04
90	2^90	0	1.237431E+27	5.085201E+23	4.107792E-04
100	2^100	3.205325E+25	1.267315E+30	3.025607E+26	2.386783E-04

PVの長さ (k)	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
200	2^200	4.151050E+53	1.606933E+60	4.917911E+54	3.060424E-06
300	2^300	6.206542E+81	2.037036E+90	1.113588E+83	5.466708E-08
400	2^400	1.561289E+110	2.582250E+120	2.991976E+111	1.158670E-09
500	2^500	4.196042E+138	3.273391E+150	8.702128E+139	2.658445E-11
600	2^600	1.125789E+167	4.149516E+180	2.674561E+168	6.445478E-13
700	2^700	0	5.260135E+210	8.268337E+196	1.571887E-14
800	2^800	0	6.668014e+240	2.731440E+225	4.096331E-16
900	2^900	0	8.452712e+270	9.160496E+253	1.083734E-17
1000	2^1000	0	1.071508E+301	3.109438E+282	2.901926E-19
2000	2^2000	0	1.148130e+602	1.039984E+568	9.058070E-35
3000	2^3000	0	1.230231e+903	5.179976E+853	4.210569E-50
4000	2^4000	0	1.318204e+1204	3.103534E+1139	2.354366E-65
5000	2^5000	0	1.412467e+1505	2.031904E+1425	1.438550E-80
6000	2^6000	5.678168E+1709	1.513470E+1806	1.459296E+1711	9.642052E-96
7000	2^7000	4.795226E+1995	1.621696E+2107	1.074532E+1997	6.625977E-111
8000	2^8000	3.627867E+2281	1.737662E+2408	8.001078E+2282	4.604508E-126
9000	2^9000	2.909188E+2567	1.861919E+2709	6.127126E+2568	3.290758E-141
10000	2^10000	2.339473E+2853	1.995063E+3010	4.776973E+2854	2.394397E-156

(*1)記号 ^は、べき乗を意味する

注:(A) PVの総数(2^k)　(B) 確定収束PVの個数　(C) 既収束PVの個数　(D) 未収束PVの個数　(E) 未収束PVの比率 D/A

Table 2-4　「１の個数」別の未収束 PV リスト

１の個数	d = 1	d = 2	d = 3	d = 4	d = 5	d = 6		d = 7	d = 8	d = 9
PVの個数	1	2	3	7	12	30		85	173	303
未収束PV	1	11	111	1111	11111	111111	11110011			
		110	1110	11110	111110	1111110	111100110	省略	省略	省略
			1101	111100	1111100	11111100	1110111			
				11101	111101	111111000	11101110			
				111010	1111010	1111101	111011100			
				11011	1111001	11111010	11101101			
				110110	111011	111110100	111011010			
					1110110	11111001	11101011			
					1110101	111110010	111010110			
					110111	1111011	1101111			
					1101110	11110110	11011110			
					1101101	111101100	110111100			
						11110101	11011101			
						111101010	110111010			
							11011011			
							110110110			

Table 2-5　「１の個数」別の確定収束 PV リスト

１の個数	d = 1	d = 2	d = 3	d = 4	d = 5	d = 6	d = 7		d = 8	d = 9
収束回数	2	4	5	7	8	10	12		13	15
PVの個数	1	1	2	3	7	12	30		85	173
確定収束PV	10	1100	11100	1111000	11111000	1111110000	110110110100	111100111000		
			11010	1110100	11110100	1111101000	110110111000	111101010100		
				1101100	11110010	1111100100	110111010100	111101011000	省略	省略
					11101100	1111011000	110111011000	111101100100		
					11101010	1111010100	110111100100	111101101000		
					11011100	1111001100	110111101000	111101110000		
					11011010	1101101100	110111110000	111110010100		
						1101110100	111010110100	111110011000		
						1101111000	111010111000	111110100100		
						1110101100	111011010100	111110101000		
						1110110100	111011011000	111110110000		
						1110111000	111011100100	111111000100		
							111011101000	111111001000		
							111011110000	111111010000		
							111100110100	111111100000		

Table 2-6　「１の個数」別の確定収束 PV と未収束 PV の個数集計表

(A)	(B)	(C)	(D)
1	2	1	1
2	4	1	2
3	5	2	3
4	7	3	7
5	8	7	12
6	10	12	30
7	12	30	85
8	13	85	173
9	15	173	476
10	16	476	961
20	32	5936673	13472296
30	48	84141805077	248369601964
40	64	2029460152095008	6113392816333320
50	80	52028134169251235063	160509643506854706934
60	96	1325438036712274130536314	4327322846731848749589802
70	111	39402905856990930693224661645	90297035113874205499700937260
80	127	1176811162775483601693782177033888	2743802136233200494910736532266785
90	143	34088001847162371052513765703648936115	82583155244433866410001965296565270848
100	159	752276648034035903600966817196471179765521	2309006583627815515505755316801664143732646

注: (A) １の個数　(B) 収束回数 (C) 確定収束PVの個数 (D) 未収束PVの個数

(A)	(B)	(C)	(D)
200	317	6.568066E+86	1.529521E+87
300	476	6.501316E+131	2.014549E+132
400	634	1.041206E+177	2.435531E+177
500	793	1.356044E+222	4.209951E+222
600	951	2.538654E+267	5.947521E+267
700	1110	3.670484E+312	1.140475E+313
800	1268	7.396696E+357	1.734178E+358
900	1427	1.127316E+403	3.504613E+403
1000	1585	2.365970E+448	5.550533E+448
2000	3170	1.506626E+901	3.539938E+901
3000	4755	1.429200E+1354	3.393522E+1354
4000	6340	1.675502E+1807	3.980332E+1807
5000	7925	2.140600E+2260	5.096390E+2260
6000	9510	2.942851E+2713	7.008399E+2713
7000	11095	3.876301E+3166	9.522458E+3166
8000	12680	5.738736E+3619	1.410026E+3620
9000	14265	8.512281E+4072	2.099039E+4073
10000	15850	1.315414E+4526	3.244099E+4526

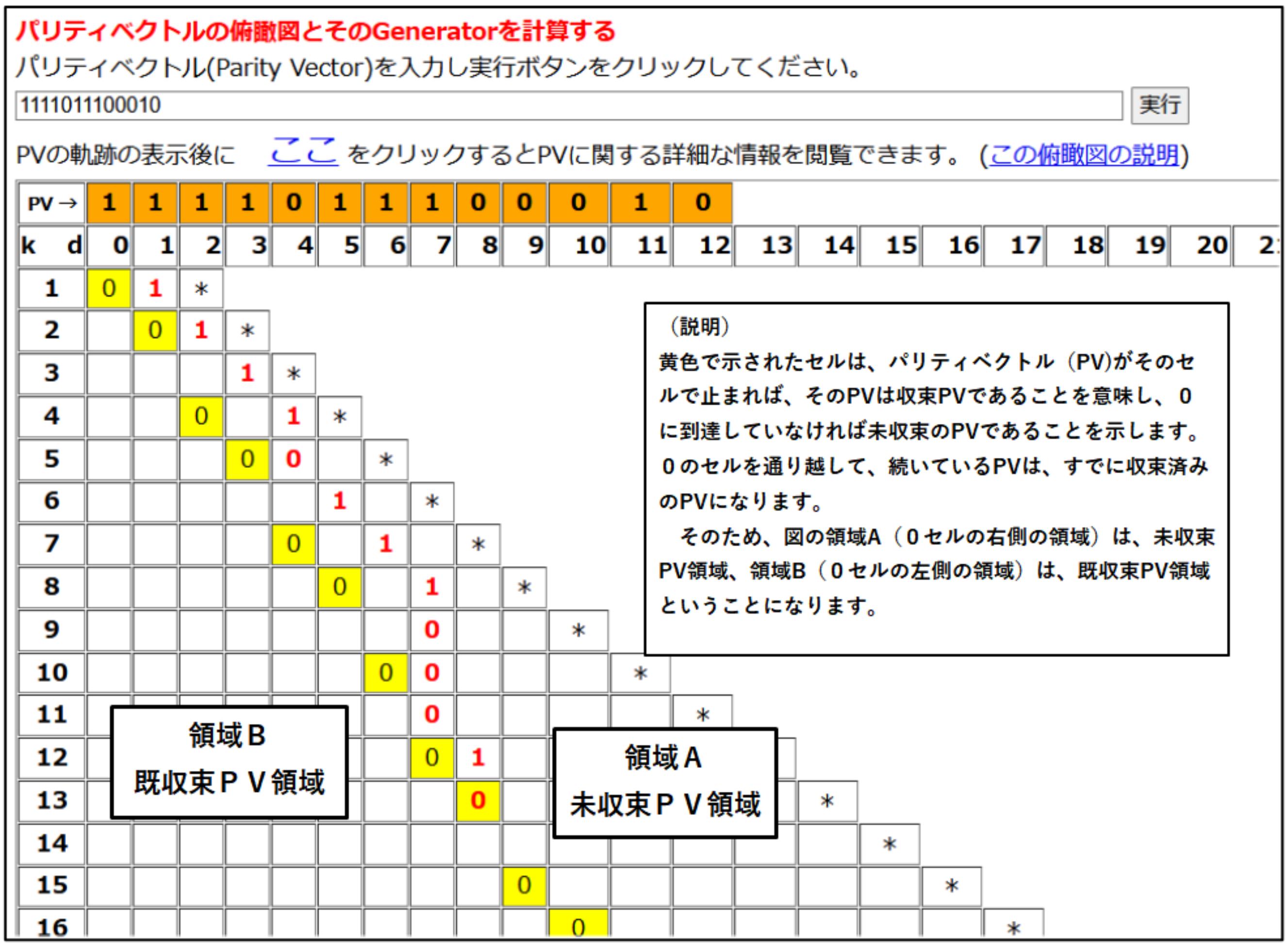
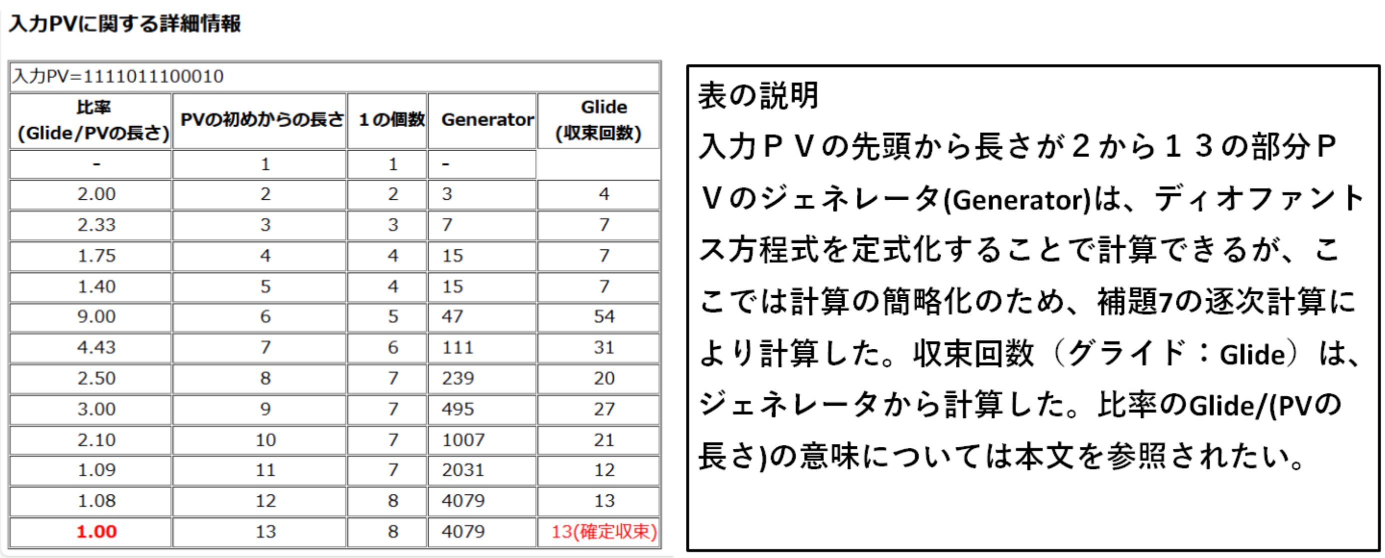


Figure 1　PV（パリティベクトル）の軌跡の図的表現（PV 俯瞰図）



入力PVに関する詳細情報

入力PV=1111011100010

比率 (Glide/PVの長さ)	PVの初めからの長さ	1の個数	Generator	Glide (収束回数)
-	1	1	-	
2.00	2	2	3	4
2.33	3	3	7	7
1.75	4	4	15	7
1.40	5	4	15	7
9.00	6	5	47	54
4.43	7	6	111	31
2.50	8	7	239	20
3.00	9	7	495	27
2.10	10	7	1007	21
1.09	11	7	2031	12
1.08	12	8	4079	13
1.00	13	8	4079	13(確定収束)

表の説明
入力ＰＶの先頭から長さが２から１３の部分ＰＶのジェネレータ(Generator)は、ディオファントス方程式を定式化することで計算できるが、ここでは計算の簡略化のため、補題7の逐次計算により計算した。収束回数（グライド：Glide）は、ジェネレータから計算した。比率のGlide/(PVの長さ)の意味については本文を参照されたい。

Figure 2（パリティベクトル) の長さ別属性値の例

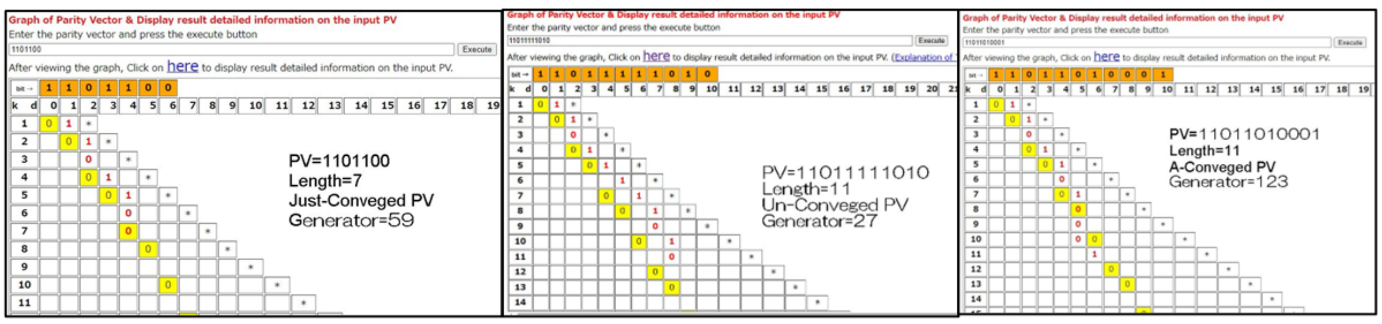


Figure 3　確定収束 PV、未収束 PV、および既収束 PV の軌跡の事例

Figure 4　正の整数 N の PV(パリティベクトル) の図的表現

Table 3-1　剰余類 $N_r = \{2^5 m + r\}$ (r=7, 15, 27, 31) 要素の ST 収束度率

		$N_7=\{2^5m+7\}$				$N_{15}=\{2^5m+15\}$				$N_{27}=\{2^5m+27\}$				$N_{31}=\{2^5m+31\}$			
PV	整数の	ST 収束度率(最大値)		TST収束度率(最大値)		ST 収束度率(最大値)		TST収束度率(最大値)		ST 収束度率(最大値)		TST収束度率(最大値)		ST 収束度率(最大値)		TST収束度率(最大値)	
長さ	総数	比率	ジェネレータ	比率	ジェネレータ	比率	ジェネレータ	比率	ジェネレータ	比率	ジェネレータ	比率	ジェネレータ	比率	ジェネレータ	比率	ジェネレータ
3	1	**2.33**	**7**	3.67	7												
4	1					**1.75**	**15**	3.00	15								
5	2									**11.80**	**27**	14.00	27	11.20	31	13	31
6	4	1.33	39	3.83	39	**9.00**	**47**	11.00	47	1.17	59	3.67	59	9.00	63	11	63
7	8	**7.29**	**71**	9.29	71	4.43	111	6.43	111	6.43	91	8.43	91	2.14	127	10	95
8	16	3.63	167	10.13	231	2.50	239	7.13	207	**5.00**	**155**	6.88	155	3.88	223	6	223
9	32	2.33	327	10.11	327	3.00	495	9.11	463	2.67	283	9.44	411	**4.44**	**447**	9	415
10	64	3.50	871	11.30	871	2.10	751	9.40	879	2.70	795	9.70	763	**8.10**	**703**	11	703
11	128	3.91	1639	10.09	1895	7.09	1583	10.36	1743	5.55	1819	10.18	1307	**7.36**	**1407**	10	1695
12	256	4.00	3399	11.42	2919	4.17	2287	10.92	3695	3.50	3323	9.17	2843	**6.67**	**2111**	13	3711
13	512	5.62	7527	9.77	6375	**5.92**	**7279**	10.62	5839	5.54	7963	12.69	6171	5.38	4255	12	6943
14	1024	**7.50**	**10087**	12.21	14695	5.36	12399	11.86	12399	5.57	15131	10.07	15131	5.93	15039	12	15039
15	2048	4.87	18599	11.67	26471	4.87	17647	11.73	17647	4.67	24091	11.33	22043	**5.40**	**22559**	13	26623
16	4096	**8.44**	**35655**	12.75	35655	7.94	60975	13.38	52527	7.69	57115	12.00	57115	7.88	37503	13	56095
17	8192	6.47	113383	13.00	77031	6.65	126575	12.35	87087	6.12	116507	12.94	115547	**7.29**	**75007**	13	106239
18	16384	5.39	191335	15.44	230631	6.44	192751	13.50	216367	5.83	226587	13.11	142587	**6.89**	**206847**	13	156159
19	32768	8.68	362343	14.42	389191	7.21	434223	14.68	461263	7.84	432923	14.84	410011	**9.11**	**381727**	14	423679
20	65536	**9.15**	**1027431**	16.45	837799	8.75	667375	15.80	667375	8.80	626331	15.95	626331	8.50	1042431	15	1003263
21	131072	8.76	1345383	15.10	1345383	8.71	2054863	15.33	1590511	8.62	1541147	15.62	1256699	**10.67**	**1126015**	17	1723519
22	262144	8.23	3964775	16.64	3542887	9.68	4053039	15.27	4053039	7.59	4112379	15.68	2725659	**10.18**	**2252031**	16	3428767
23	524288	8.83	6079559	16.57	6355687	8.35	6688623	16.78	7332399	9.65	6631675	16.70	5649499	**10.70**	**8088063**	18	6649279
24	1048576	**11.96**	**13421671**	17.58	15761255	8.46	10147375	17.63	10507503	10.38	14378779	16.71	12499963	10.21	12132095	18	8400511
25	2097152	10.72	27209575	17.04	28020007	11.48	26843343	17.68	31466383	11.44	20132507	16.84	23641883	**11.92**	**26716671**	17	20638335
26	4194304	10.31	33973607	17.88	55187303	9.58	62913839	17.92	36791535	11.85	56924955	17.88	56924955	**14.46**	**63728127**	23	63728127
27	8388608	10.48	122159271	17.85	126357223	12.74	96883183	18.78	96883183	9.41	85437723	17.96	112317531	**13.63**	**95592191**	22	127456255
28	16777216	12.25	145324775	19.96	235465895	**14.11**	**217740015**	20.00	156977263	12.07	217987163	18.89	254877787	12.96	181930687	21	191184383
29	33554432	12.14	326610023	19.03	447017287	12.41	409344047	20.24	483935471	11.48	367853339	19.24	353198843	**12.52**	**363861375**	20	286776575
30	67108864	11.27	568097511	20.23	954843751	11.47	1013856495	18.43	894034575	11.60	661398811	18.33	1025330203	**11.90**	**656055295**	21	670617279
31	134217728	12.81	1801487687	20.32	1674652263	12.84	1200991791	19.97	1788312751	11.61	2115185915	19.71	1697499995	**13.97**	**1827397567**	20	1341234559
32	268435456	10.91	4015548263	19.72	3349304551	13.28	4111644527	20.41	2937088111	**13.97**	**2788008987**	20.5	2610744987	13.88	3136510111	19	3576625503
33	536870912	11.12	7989746023	21.36	7335493223	13.27	4704765167	21.39	4890328815	11.24	7032588283	20.58	4578853915	**13.33**	**6273020223**	20	5151210655
34	1073741824	**16.09**	**14500812391/ 12235060455**	21.88	14500812391	11.38	13630636079	21.18	12212032815	11.21	13527360539	20.71	11003239835	11.91	14884335615	22	13371194527
35	2147483648	15.37	20646664519	21.51	30085187687	15.51	24470120911	21.54	20056791791	**15.6**	**21751218587**	21.74	31694683323	15.17	26130934783	21.6	26742389055

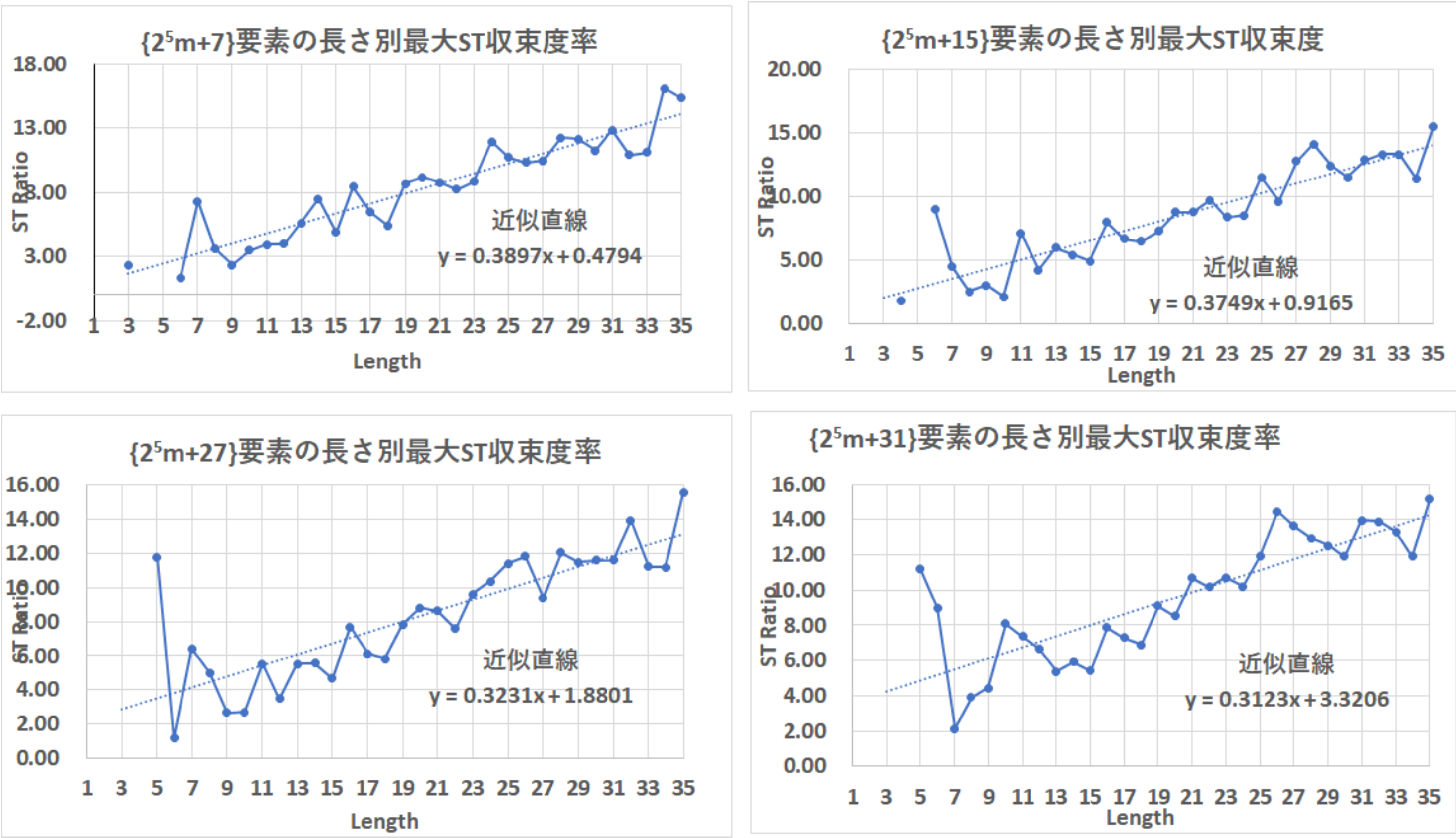


Figure 5　剰余類 $N_r = \{2^5 m + r\}$ (r=7, 15, 27, 31) 要素の ST 収束度率グラフ

Table 3-2　グライドレコード（Glide Record）と K-Max-G(N) の ST 収束度率

区間 2^k -	ジェネレータ 正整数 N	PVの長さ (LPV)	Glide Records Glide (*1)	K-Max-G(N) Glide (*2)	収束度率 Glide/LPV
2^61	2602714556700227743	62	1005	1005	16.21
2^60	1236472189813512351	61	990	990	16.23
2^57	180352746940718527	58	966	966	16.66
2^56	118303688851791519	57	902	902	15.82
2^49	1008932249296231	50	886	886	17.72
	739448869367967	50	728		14.56
2^46	70665924117439	47	722	722	15.36
2^44	31835572457967	45	712	712	15.82
2^43	13179928405231	44	688	688	15.64
2^40	2081751768559	41	606	606	14.78
2^39	898696369947	40	550	550	13.75
2^38	377945493983	39		514	13.18
2^37	149311800091	38		520	13.68
2^36	83987887551	37		535	14.46
2^35	34980046495	36		463	12.86
2^34	21751218587	35		546	15.60
2^33	14500812391	34	547	547	16.09
2^32	6273020223	33		440	13.33
2^31	2788008987	32	447	447	13.97
2^30	1827397567	31	433	433	13.97
	1200991791	31	398		12.84
2^29	656055295	30		357	11.90
2^28	363861375	29		363	12.52
2^27	217740015	28	395	395	14.11
2^26	95592191	27		368	13.63
2^25	63728127	26	376	376	14.46
	56924955	26	308		11.84
2^24	26716671	25	298	298	11.92
	20638335	25	292		11.68

区間 2^k -	ジェネレータ 正整数 N	PVの長さ (LPV)	Glide Records Glide (*1)	K-Max-G(N) Glide (*2)	収束度率 Glide/LPV
2^23	13421671	24	287	287	11.96
2^22	8088063	23	246	246	10.70
2^21	2252031	22	224	224	10.18
2^20	1126015	21	224	224	10.67
2^19	1027431	20	183	183	9.15
2^18	381727	19	173	173	9.11
2^17	206847	18		124	6.89
2^16	75007	17		124	7.29
2^15	35655	16	135	135	8.44
2^14	22559	15		81	5.40
2^13	10087	14	105	105	7.50
2^12	7279	13		77	5.92
2^11	2111	12		80	6.67
2^10	1407	11		81	7.36
2^9	703	10	81	81	8.10
2^8	447	9		40	4.44
2^7	155	8		40	5.00
2^6	71	7		51	7.29
2^5	47	6		54	9.00
2^4	27	5	59	59	11.80
2^3	15	4		7	1.75
2^2	7	3	7	7	2.33
2^1	3	2	4	4	2.00

(*1) Editted by Eric Roosendaal in [2]:"3x+1 Glide Records" http://www.ericr.nl/wondrous/glidrecs.html

(*2) 区間 $[2^k, 2^{k+1}-1]$ におけるK-Max-G(N) の値が空白の部分は、欠測値である

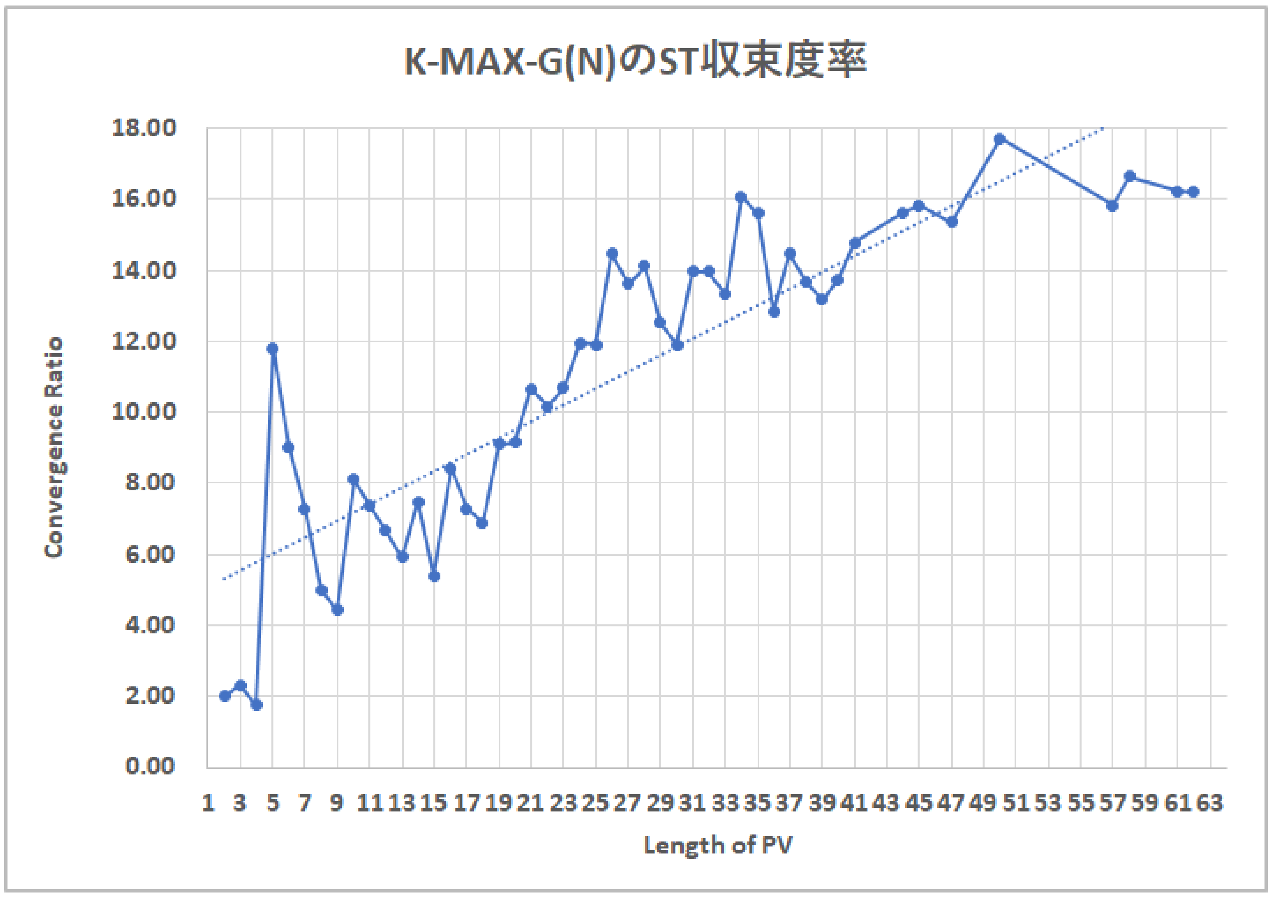


Figure 6　K-Max-G(N) の ST 収束度率グラフ

Table 3-3　「１の個数」別の確定収束 PV と未収束 PV の関係

確定収束PVの特性データ			1の個数	未収束PV							
				長さ	1	2	3	4	5	6	7
パリティベクトル (PV)	収束回数	ジェネレータ		PVの個数 → ↓	1	1	2	3	4	8	13
10	2	(1)	1	1	1(1)						
1100	4	(3)	2	2		11(3)	110(3)				
11010	5	(11)	3	1				1101(11)			
11100	5	(23)	3	2			111(7)	1110(7)			
1101100	7	(59)	4	2					11011(27)	110110(59)	
1110100	7	(7)	4	2					11101(7)	111010(7)	
1111000	7	(15)	4	3				1111(15)	11110(15)	111100(15)	
11011010	8	(123)	5	1							1101101(123)
11011100	8	(219)	5	2						110111(27)	1101110(91)
11101010	8	(199)	5	1							1110101(71)
11101100	8	(39)	5	2						111011(39)	1110110(39)
11110010	8	(79)	5	1							1111001(79)
11110100	8	(175)	5	2						111101(47)	1111010(47)
11111000	8	(95)	5	3					11111(31)	111110(31)	1111100(95)

（注）括弧内の整数はPVのジェネレータである

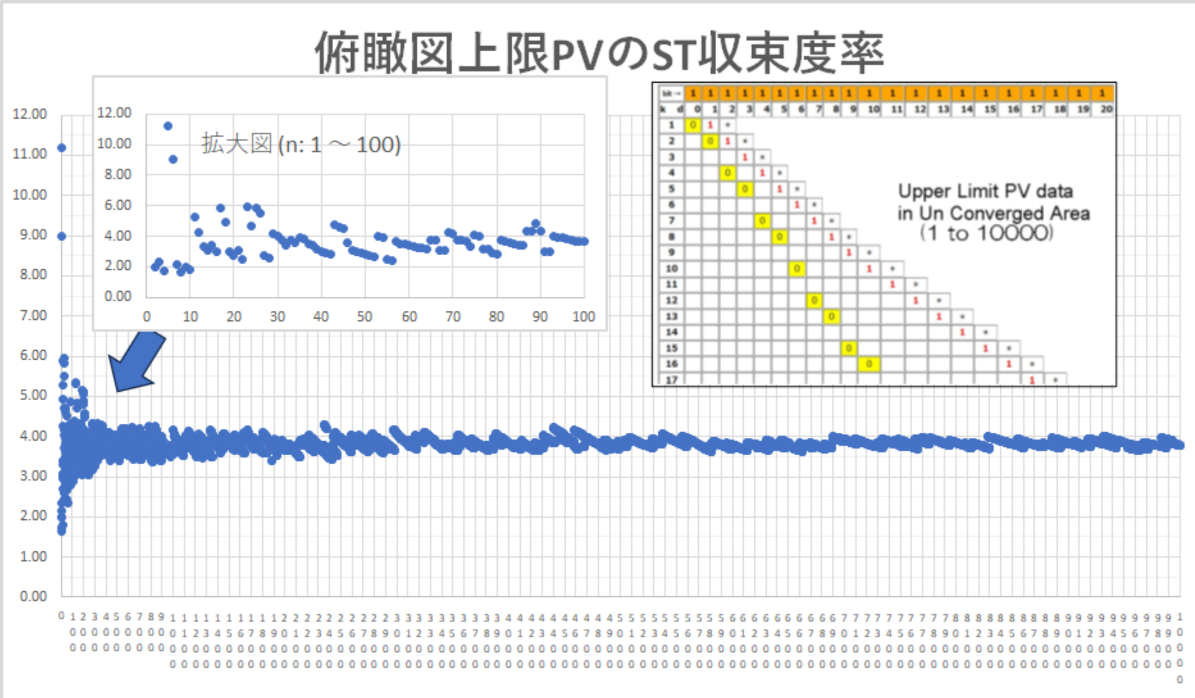


Figure 7　俯瞰図上限 PV のジェネレータ$=2^n-1$(n: 1～10000) の ST 収束度率グラフ

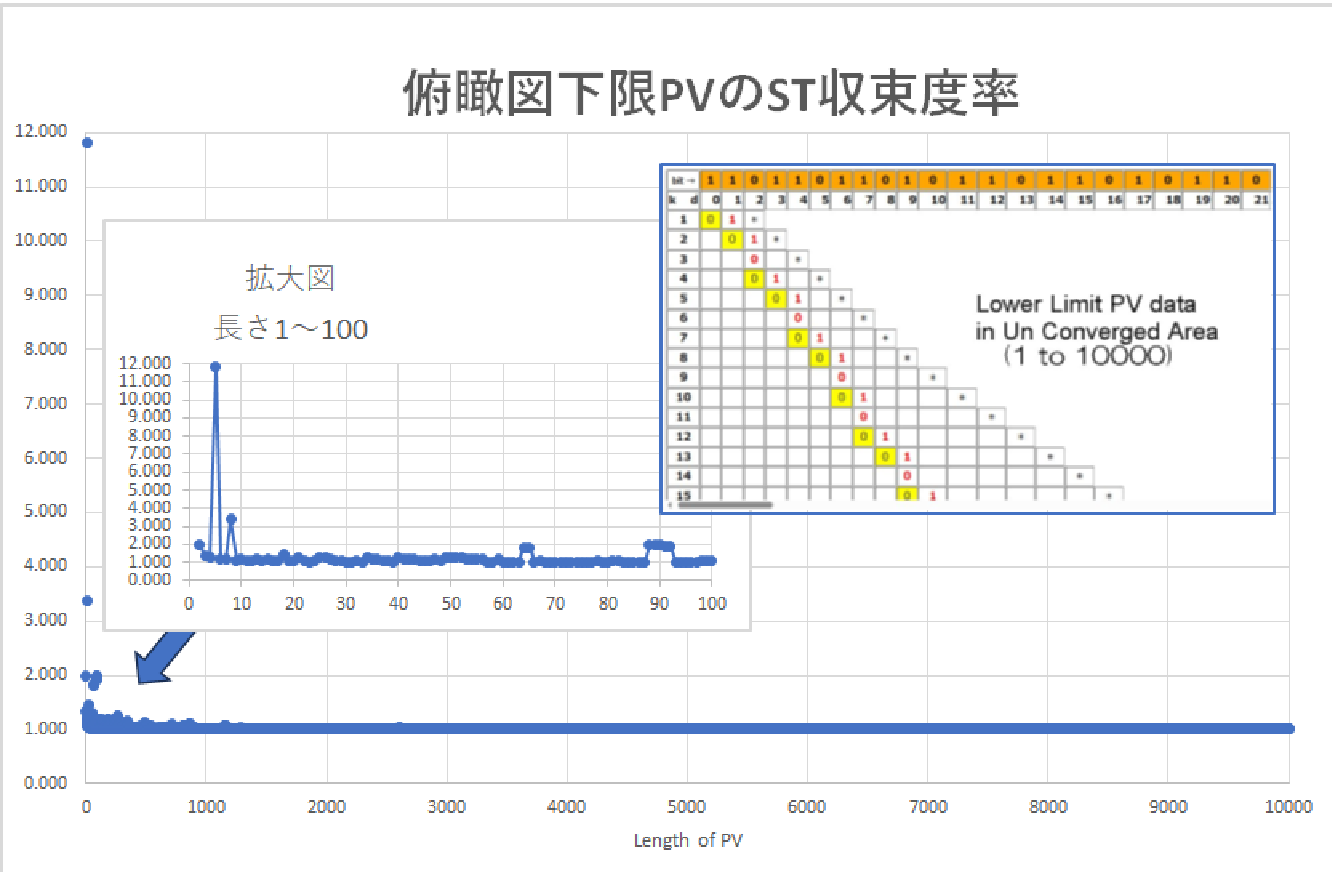


Figure 8　俯瞰図下限 PV の (1～10000) の ST 収束度率グラフ

APPENDIX 2
(コンピュータプログラムとデータ)

下記のコンピュータプログラムは論文中にリンクが貼られているデモンストレーションプログラムのソーステキストである。
使用したいプログラムをダウンロードし、コンピュータ環境に合わせて変更できます。

表 1 プログラムリスト

	PHP(*1) 言語	Python(*2) 言語
Program 1	program1.html	program1py.html
	program1.php	program1.py
Program 2	program2.php	program2.py
Program 3	program3.php	program3.py
Program 4	program4.html	program4py.html
	Program4.php	program4.py
Program 5	program5.html	program5py.html
	Program5.php	program5.py
Program 6	program6.html	program6py.html
	Program6.php	program6.py
ViewOfBird.html	ViewOfBird.html is Program 2 と Program 3 で利用される	

(*1) PHP はオープンソースのサーバ側で動作するコンパイル不要のプログラム言語である。
(*2) Python はサーバ側で動作するコンパイル不要のプログラム言語であり、 Python Software Foundation の商標である。

下記のデータは、論文中でリンクが貼られているテキストデータである。

表 2 PV の個数計算の結果リスト

	少数データ	普通サイズのデータ	多数のデータ
長さによる集計結果	1 ∼ 100	1 ∼ 1000	9000 ∼ 10000
1 の個数による集計結果	1 ∼ 100	1 ∼ 1000	9000 ∼ 10000

表 1 のデモンストレーションプログラムは、以下のコンピュータ環境で開発され運用されている。

表 3 コンピュータ環境 (要約)

(1)	コンピュータ	Windows パーソナルコンピュータ
(2)	OS	Windows 10(*1)
(3)	サーバシステム	Xampp v3.3.0 (*2)for Windows
(4)	言語	PHP 8 and Python 3
(5)	高精度整数計算	GMP function (PHP)
	calculations	mpmath (Python)

(*1) Windows は米国 Microsoft Corporation の商標である。

(*2) XAMPP は Apache Friends によって開発された無償のオープンソースの Web サーバプラットフォームである。

[謝辞]

Appendix 1 の図表および Appendix 2 のプログラムとデータを掲載していただいた GitHub に感謝します。

GitHub は、米国 GitHub, Inc. が運営するソフトウェア開発プラットフォームである。